تصمیم گیری کمی برای مدیران

(رشته مدیریت)

میرزاحسن حسینی

امیرحسین آزادنیا

علی‌اکبر آقاجانی افروزی

تقدیم به:

تمامی شهدای والامقامی که برای سربلندی جمهوری اسلامی ایران جان خود را فــدا کردند.

فهرست مطالب

پیشگفتار نویسندگان

در دنیای رقابتی امروز بقای سازمان ها در گرو تصمیم گیری صحیح مدیران می باشد که اشتباه در این امر، پرداخت هزینه های گزافی را برای آنها در پی خواهد داشت. این ضرر و زیان در سازمان هایی که حجم عملیاتی بسیار گسترده ای را تحت پوشش قرار می دهند و میزان قدرت و اختیارات مدیران نیز در آن ها، بالا می باشد، نمود ویژه ای پیدا می کند و گاها منجر به انحلال سازمانی خواهد شد. تصمیم گیری مدیران سازمان ها تحت تاثیر معیارهای کمی و کیفی گوناگونی که با یکدیگر در تعارض هستند، می باشد. لذا روش های تصمیم گیری کمی قوی و کارایی که بتواند با در نظر گرفتن معیار های مختلف، مدیران را جهت تصمیم سازی صحیح یاری رساند، مورد نیاز است. در سال های اخیر، این مساله، علاقه ی محققان و مدیران زیادی را به خود جلب کرده و تکنیک های مختلفی توسط آنها در کتب و مجلات علمی به زبان های گوناگون به چاپ رسیده است. در داخل کشور عزیزمان نیز، برخی از محققان به تهیه منابعی به زبان فارسی پرداخته اند، ولی علیرغم تلاش های محققان داخلی جهت ارائه این مطالب، کمبود کتب فارسی جامعی که بتواند به مدیران در تصمیم سازی کمک کند و هم اینکه به عنوان منبعی جهت تدریس در دانشگاه مورد استفاده قرار گیرد، مشهود است.

بنابراین، با توجه به خلا موجود در این زمینه و تجربیات مولفین این کتاب در زمینه های تصمیم گیری های کمی و تصمیم گیری های چند معیاره چه در صنعت و چه در محافل علمی، این کتاب سعی دارد تا بخشی از نیاز مدیران، تصمیم گیرندگان و همینطور دانشگاهیان را برآورده سازد.

فصل اول: کلیات تصمیم گیری

۱-۱-تصمیم گیری

تصمیم گیری یک بخش اساسی از برنامه ریزی است. تصمیم گیری و حل مساله در همه توابع مدیریت مورد استفاده قرار می گیرند، هر چند که آنها به طور معمول بخشی از مرحله ی برنامه ریزی به حساب می آیند. این فصل به ارائه ی اطلاعات در تصمیم گیری و چگونگی ارتباط آن با نخستین عملکرد مدیریت در برنامه ریزی، می پردازد. بحث در مورد ریشه های علم مدیریت منجر به یک مدل سازی، فرآیند پنج مرحله ای از علم مدیریت، و فرآیند حل مشکل مهندسی می شود.

۱-۲- ماهیت تصمیم گیری

۱-۲-۱- ارتباط با برنامه ریزی

تصمیم گیری مدیریتی، روندی از شکل گیری یک انتخاب آگاهانه بین دو یا چند جایگزین منطقی، به منظور انتخاب یک گزینه که به مطلوب ترین نتیجه(منافع) نسبت به عواقب ناخواسته (هزینه ها) می انجامد، می باشد. اگر تنها یک جایگزین وجود داشته باشد، هیچ چیزی برای تصمیم گیری وجود ندارد. اگر برنامه ریزی به واقع "تصمیم گیری در پیشبرد اینکه؛ چه کاری انجام دهیم، چگونه آن را انجام دهیم، چه زمانی انجام دهیم، و چه کسی آن را انجام دهد" (که توسط آموس و سارچت پیشنهاد شد) باشد، آن وقت تصمیم گیری یک بخش اساسی از برنامه ریزی است. تصمیم گیری همچنین در طراحی و بکارگیری نیروی انسانی یک سازمان، توسعه ی روش های ایجاد انگیزه در زیردستان، و شناسایی اقدامات اصلاحی در روند کنترل مورد نیاز است. با این وجود، به عنوان بخشی از وظایف برنامه ریزی، طبق قاعده ای مشخص مورد مطالعه قرار گرفته و در اینجا مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۱-۲-۲- تصمیم مناسب

چستر بارنارد در کتاب کلاسیک خود، از تجربه عملکرد اجرایی خود به عنوان رهبرشرکت تلفنی بل در نیوجرسی و بنیاد راکفلر نوشت، و درآنجا او به پیگیری و دنبال کردن ماهیت تصمیم گیری مدیریتی در برخی بخش ها پرداخت. او نتیجه گرفت که شرایط برای تصمیم گیری از سه زمینه متمایز نشات می گیرد:

۱- از ارتباطات استبدادی افراد مافوق.

۲-از مواردی که مربوط به تصمیم گیری بوسیله ی زیر دستان است .

۳- از موارد نشات گرفته از ابتکار اجرایی مربوطه.

بارنارد اشاره می کند که شرایط برای تصمیم ها از " نیازمندی های مقام بالاتر... که می توان از آن اجتناب نمود"، ناشی شده است. هر چند، بخشی از آن، ممکن است به زیر دستان نیز تفویض شود. موارد استیناف (اشاره به مدیر اجرایی به وسیله زیردستان) که اشاره می کند به اینکه تصمیمات همیشه نباید به وسیله ی مدیر اجرایی گرفته شود. بارنارد توضیح می دهد که محک زدن اقدامات اجرایی، در خصوص تصمیم گیری هایی است که شما نمی توانید معقولانه آن را به دیگران واگذار کنید و دیگران نیز آن را رد می کنند. بارنارد نتیجه می گیرد که موقعیت های برخاسته از تصمیم در ابتکار اجرایی، از مهم ترین محک های اجرایی هستند. موقعیت هایی وجود دارد که هیچ کس درخواستی برای یک تصمیم ندارد و مسئول اجرایی نیز نمی تواند انتقادی در خصوص عدم تصمیم گیری داشته باشد. قوای مجریه ی اثرگذار، به اتخاذ یک ابتکار عمل برای تفکر در خصوص مشکلات و فرصت های پیش روی این سازمان، و درک این برنامه ها به منظور ایجاد تغییرات لازم و اجرایی نمودن

آن ها می پردازد و تنها در این هنگام، انجام تعهد اجرایی برای ایجاد یک تصمیم صورت می گیرد، زیرا آنها نسبت به شخص دیگری که در آن مقام (جایگاه) قرار دارد، مسئولیت و تعهد دارند.

۱-۳- انواع تصمیم گیری

۱-۳-۱-تصمیم گیری معمول و غیرمعمول:

پرینگل و همکاران تصمیم گیری ها را در یک سلسله مراتب از معمول به غیرمعمول، بسته به حدی که آن ساختار داراست، طبقه بندی می کنند. آن ها به توصیف تصمیم گیری های عادی، به عنوان تمرکزی بر شرایط مناسب سازمان که به طور مداوم تکرار می شوند و شامل روش های تصمیم استاندارد، می باشد و مستلزم حداقـل عـدم قطعیت است، می پردازند. مثال های رایج شامل: پردازش حقوق و دستمزد، مرتب سازی مجدد اقلام موجودی استاندارد، پرداخت کردن به تامین کنندگان و غیره است. تصمیم گیرندگان معمولا می توانند در خصوص سیاست ها، به قوانین، رویه های گذشته، روش استاندارد پردازش، و یا تکنیک های محاسباتی تکیه کنند. احتمالا 90درصد از تصمیم های مدیریت تا حد زیادی معمولی(عادی/روزمره) می باشد. در واقع تصمیم گیری های عادی، معمولا می توانند به سطوح پایین تر در محدوده ی سیاست تاسیس شده ی سازمان واگذار شوند ، و به طور فزآینده آن ها می توانند برای رایانه، به صورت "یک تصمیم "برنامه ریزی شوند، در صورتی که بتوان آن ها را به اندازه ی کافی، ساده شکل داد. تصمیمات غیرمعمول، از سوی دیگر، به موقعیت های سازمان نیافته از یک تازگی و ماهیت بدون تکرار می پردازد که اغلب شامل دانش ناقص، عدم اطمینان بالا، و استفاده از قضاوت ذهنی و یا حتی شهود است، که در آن هیچ جایگزینی نمی تواند بهترین راه حل ممکن را برای این مشکل خاص ارائه نماید. متاسفانه، تقریبا تمام فرایند آموزشی در مهندسی بر اساس راه حل مشکلات ساختاریافته ی بالا می باشد که برای آن "راه حل کتاب درسی " وجود دارد. مهندسین اغلب خودشان را قادر به توفیق در مدیریت نمی بینند، مگر اینکه آن ها بتوانند "تحمل درابهام" که برای مقابله با مشکلات ساختار نیافته، مورد نیاز است را توسعه دهند.

هدف در مقابل عقلانیت محدود

سیمون یک تصمیم را به عنوان مقصودی منطقی تعریف می کند، اگر به راستی، این ها رفتار مناسبی برای به حداکثر رساندن مقادیر داده شده در یک موقعیت معین باشند. چنین تصمیم گیری های عاقلانه توسط "(الف) مشاهده رفتار جایگزین قبل از تصمیم گیری به طور وسیع(جامع)، (ب) با توجه به پیچیدگی کامل از پیامدهایی که در هر انتخاب دنبال می شود، و (ج) با ارزش های سیستمی که به عنوان یک اقدام تنها، در مجموعه کامل از جایگزین ها ساخته شده است، می باشد. از این رو، تصمیم گیری منطقی، شامل بهینه سازی و یا به حداکثر رساندن و در نتیجه انتخاب بهترین جایگزین از میان همه گزینه های ممکن می باشد که به صورت رویکردی در مدل تصمیم گیری/ برنامه ریزی پیشنهاد شده است.

با این حال، سیمون معتقد است که رفتار واقعی در حداقل سه روش عقلانیت هدف، کاستی دارد:

۱. عقلانیت، نیازمند یک شناخت کامل و پیش بینی پیامدهایی است که هر یک از انتخاب ها به دنبال خواهد داشت. در حقیقت، شناخت پیامدها (نتایج) همیشه ناقص می باشد.
۲. از آنجا که این پیامدها در آینده نمایان می شود، تصورات باید به عرضه ی احساس کمبود تجربه، در زنجیره ی ارزش بپردازد، اما ارزش ها را می توان به صورت ناقص پیش بینی کرد.
۳. عقلانیت، نیازمند یک انتخاب از میان همه ی رفتارهای جایگزین احتمالی است. در رفتار واقعی، تنها تعداد کمی از این گزینه های احتمالی به ذهن می آیند.

زمانی که مدیران برای تصمیم گیری تحت فشار هستند، فرصت و منابع کافی را برای در نظر گرفتن همه جایگزین ها یا در نظر گرفتن تمام حقایق برای تک تک جایگزین ها، ندارند؛ یک مدیر باید تحت شرایط عقلانیت محدود عمل کند، و با در نظر گرفتن تنها تعداد معدودی از عواملی که از آنها آگاهی دارد، مسائل را درک نموده و به گزینه های مناسب توجه کند. مدیران باید به پذیرش مجموعه اقداماتی که رضایت بخش و یا به اندازه کافی خوب می باشد، بپردازند. مدیران به طور ویژه، می بایست به پیروی از مهندسان و دانشمندان، یاد بگیرند که در رابطه با زیردستان خود، بر این موضوع پافشاری کنند که به جای آنکه ، به پیگیری تحقیق و یا طراحی خارج از هدف که در افزایش سودمندی برای مطابقت با هزینه های دستیابی به هدف، لازم نمی باشد، بپردازند، پس از رسیدن به یک راه حل رضایت بخش برای یک مشکل، به سمت مشکلات بعدی حرکت کنند.

سطح اطمینان

تصمیم گیری ممکن است به عنوان شرایط اطمینان، خطر، یا عدم قطعیت، بسته به میزان ارتباطی که در آینده، با محیط خواهد داشت، برآورد شده و شناسایی و طبقه بندی گردد.

۱-۳-۲-تصمیم گیری کمی و کیفی

هنگامی که شما به عنوان یک مدیر، در زمینه ی کسب و کار تصمیم گیری می کنید، شما عوامل کیفی مانند شهرت، قدرت نام تجاری و روحیه کارکنان و همچنین داده های کمی قابل اندازه گیری از قبیل آمار فروش، سودآوری و بازگشت سرمایه را لحاظ خواهید کرد. هر دو تجزیه و تحلیل کیفی و کمی را می توان برای تصمیم گیری به کار برد. این نوع تصمیم گیری ها را می توان از سه منظر ورودی ها، خروجی ها و روش های تحلیل با هم مقایسه نمود که به شرح ذیل می باشد:

تفاوت در ورودی ها:

در حالی که در تحلیل کمی و کیفی، ممکن است از اطلاعات یک مشخصه ی مشابه استفاده کنید، روش های کیفی برای داده ها یی که به راحتی قابل سنجش نیستند، مورد استفاده قرار می گیرند، در حالی که روش های کمی برای داده هایی که قابل سنجش هستند و عدد مقدار عددی مشخص دارند، مورد استفاده قرار می گیرند . برای مثال، اگر شما می خواهید به تجزیه و تحلیل اینکه چگونه مشتریان شما به محصولاتتان با دید مثبت نگاه می کنند بپردازید، شما بایستی برای بدست آوردن بازخورد، با بخشی از مشتریان مصاحبه کنید. این داده های کیفی را به سختی می توان با اعداد بیان کرد. در عوض، شما ممکن است به تجزیه و تحلیل داده های عینی مانند این که چه تعداد از مشتریان، محصول شما را می خرند، تعداد شکایت ها، تعداد مرجوعی های محصولات و تعداد دفعات استفاده از گارانتی بپردازید. شما این اطلاعات کمی را می توانید به شکل ریاضی بیان کنید.

تفاوت در تجزیه و تحلیل:

هنگامی که شما داده های ورودی تصمیم خود را بدست آوردید، روش های تحلیل کمی و کیفی متفاوتی استفاده می شوند. برای کسب اطلاعات کیفی مانند متن مصاحبه ها، متون و تصاویر، شما باید به مطالعه ی آن ها بپردازید تا به درک ماهیت و مفهوم آن برسید. اگر می خواهید دید مثبت مشتریان نسبت به محصولات شرکت خود را قضاوت کنید، شما باید به دقت به آن چه می گویند، گوش دهید و به جملات مثبتی که در زمینه محصولاتتان می گویند، توجه کنید. نتایج تجزیه و تحلیل شما به یه یک قضاوت کیفی منجر خواهد شد، مانند اینکه به این نتیجه برسید که مشتریان شما محصولاتتان را بسیار زیاد

دوست دارند. تجزیه و تحلیل کمی بر روش های آماری و ارزشیابی ریاضی متکی است. به عنوان مثال، شما می توانید درصدی از مشتریان را که با محصول شما به مشکل برخورده اند، یا درصد مشتریانی که محصول دیگری خریده اند را محاسبه کنید. شما می توانید با این اطلاعات به این نتیجه برسید که ممکن است چه میزان محصولتان را بفروشید.

تفاوت در خروجی:

نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل کیفی، اغلب مبهم می باشد. اما ممکن است حاوی اطلاعات اضافه ای باشد، در حالی که نتایج کمی منجر به قطعیت خواهد شد. به عنوان مثال، مصاحبه نشان می دهد که مشتریان محصولات شما را دوست دارند اما تحویل سریعتر محصولات، باعث خوشحالی بیشتر آنها خواهد شد. تجزیه و تحلیل کمی شما، به دلیل آن که با دقت در ویژگی خاصی متمرکز شده است، دارای چنین اطلاعات اضافی نمی باشد، مانند رضایت مشتری. خروجی های مختلف از تجزیه و تحلیل، به شما این اجازه را می دهد که با استفاده ازخروجی تحلیل کیفی به بررسی این موضوع بپردازید که خروجی تحلیل کمی چه چیزی را بیان می کند تا بر اساس آن اطلاعات بیشتری در مورد مساله بدست آورید.

تصمیم گیری از طریق تجزیه و تحلیل کمی

برای حل مشکلاتی که بسیار مهم و یا بسیار پیچیده می باشند، بدون استفاده از تحلیل و بررسی کمی نمی توان روش مناسبی را ارائه نمود. تجزیه و تحلیل کمی، نیاز به بیان یک مدل ریاضی با استفاده از یک مساله می باشد. مدل سازی ریاضی، یک بخش پر اهمیت از رویکرد کمی در تصمیم گیری ها می باشد. همچنین می توان گفت ساخت مدل های ریاضی کاملا معقولانه، برای بیان مشکلات دنیای واقعی، یک مهارت ضروری برای همه ی مهندسان می باشد.

عوامل اثرگذار و مدل های عملکرد سیستم:
عوامل غیر قابل کنترل : عواملی مانند عوامل محیطی، که در تصمیم گیری قابل کنترل نیستند.

ورودی های کنترل: عواملی هستند که ارزش مقادیر اثرگذار در عملکرد سیستم را می توان به وسیله تصمیم گیرنده کنترل کرد.
این عوامل به نام متغیرهای تصمیم معروف هستند.

مدل های قطعی: اگر تمام ورودی غیر قابل کنترل دقیقا قابل شناسایی و تغییر نباشند، عملکرد سیستم به مقادیر متغیرهای تصمیم بستگی دارد و این مدل یک مدل قطعی خواهد بود.

مدل احتمالاتی یا تصادفی : زمانی که ورودی های غیر قابل کنترل، نامشخص و در معرض تغییر هستند، در این مواقع، عملکرد سیستم حتی در هنگامی که مقادیر همه ی متغیرهای تصمیم گیری ثابت هستند، نامشخص است.
در این زمان، ما مطالعه ی مدل های قطعی را انجام می دهیم.

مراحل انجام تصمیم گیری های تجزیه و تحلیل کمی
۱- ساختمان مدل:
ساخت یک مدل ریاضی می باشد که چگونگی عملکرد سیستم را نشان می دهد(شناسایی متغیرهای تصمیم گیری، محدودیت بر روی آنها، و تابع هدفی که عملکرد سیستم را اندازه گیری نماید).

۲-حل مدل:

استفاده از یک الگوریتم کارآمد برای به دست آوردن یک راه حل بهینه می باشد.

۳-پیاده سازی راه حل، و یا به روز رسانی مدل و تکرارآن:

بررسی راه حل ها برای امکان سنجی عملی آن، که در صورت مناسب نبودن، تغییرات لازم را در مدل ایجاد کرده و آن را تکرار می کنیم.

همچنین، بسیاری از اوقات تصمیم گیرندگان برای تبدیل راه حل بهینه به یک راه حل قابل اجرا از دانش و آگاهی کاربردی خود بهره می گیرند.

فصل دوم: مدل سازی و برنامه ریزی خطی

اهداف فصل

در این فصل دانشجویان با صورت کلی برنامه‌ریزی خطی (LP) آشنا خواهند شد و با ارائه نمونه‌های مختلف، علم و هنر مدلسازی خطی به دانشجویان آموخته می‌شود.

۲-۱- مقدمه

پیچیدگی و ناآرام بودن محیط سازمانها، باعث شده است که مدیران به آسانی تصمیم‌گیری نکنند. مدیران برای رسیدن به یک هدف مشخص با محدودیتهای بسیاری چون محدودیت منابع، انرژی، نیروی انسانی مواد، پول و ... مواجه هستند. هدف اغلب مدیران و سازمانها، رسیدن به سود بیشتر و یا به عبارت دیگر حداکثر کردن سود می‌باشد. در ضمن سازمانهایی وجود دارند که درصدد حداقل کردن هزینه، ضایعات و ... خود هستند.

با افزایش عوامل و فاکتورهای تصمیم‌گیری و با تنوع محدودیت های نیل به هدف، مدیر ناچار است که از روشهای کمی برای برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری استفاده کند. یکی از روش های متداول برای بهینه‌کردن یک هدف با توجه به محدودیت های مختلف، برنامه‌ریزی خطی است، همچنانکه در فصل قبل گفته شد، برنامه‌ریزی خطی شامل مدلی است که دارای یک تابع هدف و چند محدودیت است که روابط خطی بین متغیرهای آن در تابع هدف و محدودیت ها وجود دارد.

سه گام اساسی در بکارگیری برنامه‌ریزی خطی در عمل، باید در نظر گرفته شود. اولا؛ مساله باید به گونه‌ای تعریف شود که با استفاده از برنامه‌ریزی خطی قابل حل باشد. دوما؛ مساله باید در قالب یک مدل ریاضی فرموله شود. ثالثا، مساله باید با استفاده از یک تکنیک مشخص ریاضی قابل حل باشد. نام برنامه‌ریزی خطی برگرفته از این واقعیت است که؛ «روابط کارکردی در مدل ریاضی خطی هستند و تکنیک حل مدل شامل مراحل ریاضی از پیش تعیین شده به عنوان یک برنامه می‌باشد».

۲-۲- مدل سازی

هر مدل برنامه‌ریزی خطی شامل اجزاء و ویژگیهای مشخصی است. اجزاء مدل عبارتند از: متغیرهای تصمیم، تابع هدف و محدودیتهای مدل. ساختار تابع هدف و محدودیتهای مدل برنامه‌ریزی خطی از متغیرهای تصمیم و پارامترها شکل می‌گیرد. «متغیرهای تصمیم، شامل نمادهای ریاضی است که سطح فعالیت هر مؤسسه را بیان می‌کنند». به عنوان مثال یک کارخانه سازنده ی وسایل الکتریکی را در نظر بگیرید که تمایل دارد X_1 و X_2 تلویزیون و X_3 ویدیو تولید کند. نمادهای X_3,X_2,X_1 هر یک بیانگر مقادیر ناشناخته از سطح تولید رادیو، تلویزیون و ویدیو هستند. مقادیر نهایی X_3,X_2,X_1 که به وسیله‌ی کارخانه تعیین می‌شود، یک «تصمیم» را برای کارخانه بیان می‌کند (برای مثال $X1=100$ بیانگر این است که کارخانه تصمیم گرفته است که ۱۰۰ دستگاه رادیو تولید کند).

تابع هدف مدل، یک رابطه‌ی ریاضی خطی است که هدف مؤسسه را در قالب متغیرهای تصمیم توصیف می‌کند. تابع هدف همواره به صورت «حداکثر کردن» و یا «حداقل کردن» بیان می‌شود.(برای مثال حداکثر کردن سود و یا حداقل کردن هزینه‌ی کالاهای تولیدی ممکن است هدف کارخانه باشد). محدودیت های مدل نیز بیانگر روابط خطی بین متغیرهای تصمیم هستند، محدودیت ها به وسیله‌ی محیط عملیاتی به مؤسسه تحمیل می‌شوند. محدودیت ها اغلب ناشی از محدودیت منابع و یا «سیاستگذاری های» داخلی مؤسسه می‌باشند. برای مثال اگر برای کارخانه، صرف فقط ۴۰ ساعت کاری برای تولید رادیو مقدور باشد، کارخانه ناچار است این محدودیت را در نیل به هدف در نظر داشته باشد. مقادیری که به صورت «مقادیر ثابت در تابع هدف و در محدودیت ها بیان می‌شود (همانند ۴۰ ساعت کار در دسترس)، پارامترهای مدل خوانده می‌شوند».

برای فرموله کردن هر مساله‌ای، می‌توان یک چارچوب منظم را اعمال کرد. ما در این کتاب توصیه می‌کنیم که همواره مراحل زیر را برای فرموله کردن اعمال نمایید:

مرحله اول: متغیرهای تصمیم را تعریف کنید.

مرحله دوم: تابع هدف را فرموله کنید.

مرحله سوم: محدودیتهای مدل را فرموله کنید.

هنر فرموله کردن یک مساله در دنیای واقعی، بسیار پیچیده و وقت‌گیر است، و البته همچنانکه اکاف بیان می کند، کاملاً شبیه هنر کوزه‌گری است که در ضمن ساختن آن، باید هر بار برای بهبود مدل و زیباسازی آن تلاش کرد. با این وجود، تجربه نشان داده است که رعایت مراحل فوق، فرد مبتدی را در مدل سازی یاری خواهد داد. بنابراین به جای در نظر گرفتن کل مساله، باید آن را به صورت جزء به جزء شناخت و سپس آن را فرموله نمود. در ضمن قبل از هر اقدامی برای فرموله کردن مساله باید به خوبی آن را مطالعه کرد و پس از درک اجزاء آن، فرموله کردن مساله را آغاز نمود.

مراحل سه گانه‌ی فرموله کردن به تفصیل در بخش بعدی ضمن بیان مثالهایی کاربردی تشریح می‌شود. مسائلی که در بخش بعدی فرموله می‌شوند، مسائل مبتلا به سازمانها هستند که دانشجو با فراگیری آنها باید قادر به فرموله کردن اکثر مسائل واقعی با اندک تغییرات باشد.

حل هر مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی با تبدیل آن به یک مدل استاندارد، آغاز می‌شود. یک مساله وقتی دارای شکل استاندارد است که :

- تابع هدف آن ماکزیمم باشد.

- همگی قیدها به صورت $\leq$ باشند؛

- تمامی متغیرها غیرمنفی باشند.

در صورتی که هر یک از سه شرط فوق نقض شوند، شکل مساله استاندارد نخواهد بود.

شکل کلی برنامه‌ریزی خطی مدل استاندارد به شرح زیر است:

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1a} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2a} x_n \leq b_2$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \leq b_i$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0 (j = 1, \dots n)$$

۱. $\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$ نشان دهنده تابع هدف می باشد که در آن c_j نشان دهنده ضرایب متغیرهای تصمیم در توابع هدف می باشد.

۲. $a_{ij} x_j \leq b_i$ نشان دهنده محدودیت های مساله می باشد که در آن a_{ij} ضرایب متغیرهای تصمیم در محدودیت ها و b_i نشان دهنده میزان منبع i ام می باشد.

۳. در آخر شرط غیرمنفی بودن نظریه‌ها یا متغیرهای تفهیم را ایجاد شده است:

$$x_j \geq 0 (j = 1, \dots n)$$

مفروضات برنامه ریزی خطی :

فرض جمع پذیری : روابط به صورت جمع بیان می شود.

فرض تناسب : هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیتها عمل می کند.

فرض بخش پذیری : متغیرهای تصمیم می توانند غیر صحیح نیز باشند.

فرض معین بودن: کلیه پارامتر ها، مقادیر ثابتی هستند.

در ادامه ی مطالب، مسائل مدلسازی، روش ترسیمی و سیمپلکس را ارائه خواهیم داد.

در صورت نادیده گرفتن این فرض برنامه ریزی عدد صحیح را خواهیم داشت**.**

نمونه مسائل مدل سازی

مثال

تعداد محصول aوbدر کارگاه الف و ب همچنین میزان ظرفیت دو کارگاه در جدول بیان شده است. میزان سود برای محصول A ۶ واحد و برای محصول b ۸ واحد در نظر گرفته شده است.حداکثر میزان تقاضا ۷۰ واحد و حداقل ۳۰ واحد اعلام شده است. میزان نفر نیروی انسانی هم در جدول ذیل آمده است .با این توضیحات مساله را جهت حداکثر سازی سود فرموله کنید.

تولید و ترکیب		
در یک کارگاه موجودی کالا	محصول B	محصول A
۲۰۰	۴	۳ الف
۵۰۰	۲	۵ ب
۸۵۰ ظرفیت	۸۱	$ ۶ سود
	۴نفر ساعت	۷ نفردر ساعت نیروی انسانی

	۳۰Min	۷۰Min

X1تعداد محصول A

X2 تعداد محصول B

$$maxZ = 6x_1 + 8x_2$$

$$ST: 3x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 250$$

$$7x_1 + 4x_2 \leq 150$$

$$x_1 \leq 70$$

$$x_2 \geq 30$$

$$x_1 x_2 \geq 0$$

مثال: در یک کارگاه نساجی ۴ نوع روسری تولید می‌شود. نوع اول ابریشمی است، نوع دوم پلی استر، نوع سوم (۵۰٪ پنبه و ۵۰٪ پلی استر) نوع چهارم (۷۰٪ پنبه و ۳۰٪ پلی استر) از پلی استر و پنبه تولید می‌شود هر متر ابریشم دارای هزینه ۲۱ هزار پلی استر ۲۴۰۰، پنبه ۳۶۰۰ است. موجودی این سه ماده اولیه در ماه به ترتیب ۸۰۰۰، ۳۰۰۰، ۱۶۰۰ می‌باشد تقاضای ماهانه برای این ۴ نوع روسری به ترتیب ۷۰۰۰ هزار ، ۱۴۰۰۰ هزار، ۱۶۰۰۰ هزار ، ۸۵۰۰ می‌باشد. حداقل قرارداد برای این ۴ نوع روسری ۶۰۰۰ هزار، ۱۰۰۰ هزار، ۳۰۰۰ هزار و ۶۰۰۰ هزار می‌باشد. حداقل ابریشم برای هر واحد روسری نوع اول نیم متر، پلی‌استر برای نوع دوم ۱۴۵ متر، مدل نوع سوم ۵۵٪ و مدل نوع چهارم ۱۶۰متر پلی استر و پنبه می باشد. قیمت فروش به ترتیب ۱۵۰۰۰، ۳۰۰۰، ۴۵۰۰، ۴۸۰۰ می‌باشد. مساله را جهت به دست آوردن حداکثر سود فرموله کنید.

حل:

متغیرهای تصمیم:

میزان تولید نوع اول :X1

میزان تولید نوع دوم :X2

میزان تولید نوع سوم :X3

میزان تولید نوع چهارم :X4

سود نوع اول ۱۵/۰۰۰-(۲۱/۰۰۰× ۰/۵)=۴/۵۰۰

سود نوع دوم ۳/۰۰۰-(۲/۴۰۰×۰/۴۵)=۱۹۲۰

سودنوع سوم ۴۵۰۰-۰/۵(۲۴۰۰+۳۶۰۰)×۰/۵۵)=۲۸۵۰

سود نوع چهارم ۴۸۰۰-(۲۴۰۰×۰/۳+۳۶۰۰×۰/۷)۰/۶=۲۸۵۶

maxZ=۴۵۰۰x1+۱۹۲۰x2+۲۸۵۰x3+۲۸۵۶X4

ابریشم مصرف $0/5x_1 \leq 800$

پلی مصرف $0/45\mathrm{x}_2 + (50\% \times 0/55)\mathrm{x}_3 + (0/6 \times \%3)\mathrm{x}_4 \leq 31$

پنبه مصرف $(55\% \times 0/55)\mathrm{x}_3 + (0/6 \times \%7)\mathrm{x}_4 \leq 16$

حداقل قرارداد	حداکثر
$x_1 \geq 6000$	$x_1 \leq 7000$
$x_2 \geq 1000$	$x_2 \leq 14000$
$x_3 \geq 1300$	$x_3 \leq 16000$
$x_4 \geq 6000$	$x_4 \leq 8/500$

مثال : شرکتی درصدد تبلیغات برای محصولات خود می باشد. این شرکت می تواند از طریق مجله، رادیو و تلویزیون تیلیغات کند. هدف این شرکت بیشینه سازی میزان افراد تحت پوشش تبلیغات می باشد. علاوه بر این این شرکت در نظر دارد تعداد دفعات تبلیغ در هر رسانه را طوری تعیین کند که حداقل ۱۵۰۰۰ خانم تحت پوشش تبلیغاتی قرار گیرند. اطلاعات مربوط به این مساله در جدول ذیل آورده شده است. مساله را مدل سازی کنید.

	مجله	رادیو	در زمان مناسب	تلویزیون در زمان عادی
هزینه هر بار تبلیغات	۱۰۰	۱۵۰	۳۰۰	۲۰۰
میزان کل افراد تحت پوشش	۸۰۰۰	۱۰۰۰۰	۲۵۰۰۰	۱۵۰۰۰
میزان کل خانم های تحت پوشش	۵۰۰۰	۷۰۰۰	۱۰۰۰۰	۸۰۰۰
محدودیت های شرکت برای تعداد تبلیغات	حداکثر ۲	بین ۴ تا ۵بار	حداکثر ۳	حداقل ۲

بودجه تبلیغ در تلویزیون ۲۰۰۰ واحد

بودجه تبلیغ ۴۰۰۰ واحد

تعداد دفعات تبلیغ در ساعات عادی *x1*

تعداد دفعات در زمان مناسب *x2*

تعداد دفعات تبلیغ در زمان رادیو *x3*

تعداد دفعات تبلیغ مجله *x4*

$$maxZ = 15000x_1 + 25000x_2 + 10000x_3 + 8000x_4$$

$$st: 200x_1 + 300x_2 + 150x_3 + 100x_4 \leq 4000$$

$$200x_1 + 300\mathrm{x}_2 \leq 2000$$

$$8000x_1 + 10000x_2 + 7000x_3 + 5000x_4 \geq 15000$$

$$x_1 \geq 2 \quad x_2 \leq 3 \quad 3 \leq x_3 \leq 5 \quad x_4 \leq 2$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1/2,3/4$$

مثال : حمل و نقل

ما دارای ۴ انبار هستیم، با موجودی ۷۰۰،۴۰۰،۵۰۰،۳۰۰. در نظر داریم این مقدار موجودی را در سه فروشگاه با تقاضای ۵۰۰،۸۰۰،۶۰۰ توزیع کنیم. هزینه حمل نیز در جدول آمده است. با این اطلاعات مساله را جهت حداقل سازی هزینه های حمل و نقل، مدل سازی کنید.

تقاضا	فروشگاه	موجودی	انبار
۶۰۰	الف	۳۰۰	A
۸۰۰	ب	۵۰۰	B
۵۰۰	ج	۴۰۰	C
		۷۰۰	D

هزینه حمل

ج	ب	الف	۰/۱
۸	۸	۷	A
۵	۱۰	۹	B
۴	۷	۶	C
۱۰	۹	۵	D

متغیرهای تصمیم:

x_{ij} : میزان حمل کالااز انبار iام به فروشگاه jام

$$minZ = 7x_{11} + 8x_{12} + 8x_{13} + \cdots .. + 10x_{43}$$

- محدودیت تقاضا به صورت بزرگتر مساوی نوشته می‌شود.

- محدودیت عرضه به صورت کوچکتر مساوی نوشته می‌شود.

$st: x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 300$ برای عرضه

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 500$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 400$$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 600$ برای تقاضا

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 800$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 500$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1/2/3/4$$

$$j = 1/2/3$$

$$j = 1/2/3$$

- سه نوع گازوییل داریم با درجه ۱ و ۲ و۳ میزان تقاضا برای این سه نوع گازوئیل ۵۰۰ و ۷۰۰و۶۰۰ بشکه است قیمت فروش محصول۱، ۳۰ واحد و محصول۲، ۲۵ و محصول ۳ ،۲۰ واحد است. مشخصات فنی میزان استفاده مواد اولیه الف ب ج همچنین قیمت و موجودی در جدول آمده است. مساله را جهت حداکثر سازی سود مدل سازی کنید.

نوع گازوئیل	متد تقاضا	قیمت فروش واحد	مشخصات فنی
درجه ۱	بشکه ۵۰۰	۳۰	حداقل ۲۰ درصد ماده اولیه الف حداکثر ۱۵ درصد ماده اولیه الف
درجه ۲	بشکه ۷۰۰	۲۵	حداقل ۲۰ درصد ماده اولیه ب حداکثر ۳۰ درصد ماده اولیه ج
درجه ۳	حداکثر ۶۰۰	۲۰	حداکثر ۲۵ ماده اولیه الف

نوع ماده اولیه خام	موجودی	قیمت هر واحد
الف	۲۰۰	۸$
ب	۲۰۰	۷$
ج	۱۵۰	۹$
د	۲۵۰	۱۰$

هزینه – فروش=سود که max می‌شود.

نوع ماده خام :jنوع گازوئیل i : x_{ij}

$$\max Z: 30(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14})+25(x_{21}+\cdots+x_{24})+$$

$$20(x_{31}+\cdots+x_{34})-8(x_{11}+x_{21}+x_{31})-7(x_{12}+x_{22}+x_{32})$$

$$-9(x_{13}+x_{23}+x_{33})-10(x_{14}+x_{24}-x_{34})$$

$$maxZ: (30x_{11}-8x_{11})+23x_{12}+21x_{13}+20x_{14}+17x_{12}+$$

$$18x_{22} + 16x_{23} + 15x_{24} + 12x_{31} + 13x_{32} + 11x_{33} + 10x_{34}$$

St:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 500$$

$$x_{21} + \cdots + x_{24} \geq 700$$

$$x_{31} + \cdots + x_{34} \geq 600$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 300$$ محدودیت تقاضا

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 200$$ محدودیت موجودی

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 150$$ محدودیت فنی

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 250$$

$$\frac{x_{11}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}} \geq 0/2 \qquad \frac{x_{22}}{x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}} \geq 0/2$$

$$\frac{x_{14}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}} \geq 0/15 \qquad \frac{x_{23}}{x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}} \geq 0/3$$

$$\frac{x_{31}}{x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}} \geq 0/25$$

$$x_{ij} \geq 0$$

مدل زمین‌های کشاورزی

سه مزرعه داریم با ۴ نوع بذر مساحت مزارع، درآمد فروش و آب مورد نیاز و حداکثر کشت برای بذر در جدول زیرآمده است.

مساله را جهت حداکثر سازی سود، بهینه کنید.

مقدار آب	مساحت هکتار	مزرعه
۱۵	۳۰	A
۱۸	۲۵	B
۲۰	۳۲	C

حداکثر کشت	آب مورد نیاز	درآمد فروش	محصول
۲۰	۵	۱۷	گندم
۳۵	۶	۲۵	جو
۴۰	۵	۳۰	ذرت
۳۵	۷	۳۵	پنبه

میزان کشت محصول نوع i در مزرعه j: xij

$$\max Z = 17(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 25(x_{21} + x_{22} + x_{23})$$

$$+30(x_{31} + x_{32} + x_{33}) + 35(x_{41} + x_{42} + x_{43})$$

$$s_9 = x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 30$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \leq 25$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \leq 32$$

$5x_{11} + 6x_{21} + 5x_{31} + 7x_{41} \leq 15$

$5x_{12} + 6x_{22} + 5x_{32} + 7x_{42} \leq 20$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 20$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 35$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 40$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 35$

$x_{ij} \geq 0$

شیفت بندی نیروی انسانی

-هر یک از این خدمتکاران ۸ ساعت متوالی در روز کار می‌کنند، جدول زیر اوقات کاری و حداقل نیروی مورد نیاز را نشان می دهد. مساله را جهت حداقل سازی استفاده از نیروی انسانی، مدل سازی کنید.

تعداد خدمتکاران که درساعت *i* ام هستند : X_i

اوقات	حداقل نیروی مورد نیاز
۲-۶	۴
۶-۱۰	۸
۱۰-۱۴	۱۰
۱۴-۱۸	۷
۱۸-۲۲	۱۲

۴	۲۲-۲

$$min\ Z = x_1 + x_2 + \cdots + x_6$$

$$x_1 + x_6 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_3 + x_4 \geq 7$$

$$x_4 + x_5 \geq 12$$

$$x_5 + x_6 \geq 4$$

۲-۳- روش ترسیمی حل مساله برنامه‌ریزی خطی

در فرآیند تحقیق در عملیات اشاره شد که پس از ساختن مدل، به مرحله ی حل آن می‌رسیم. در واقع یک مدل ریاضی، به خودی خود ارزش کاربردی و تحلیلی ندارد. اهمیت و ارزش مدل به نتایج آن است که پس از حل، حاصل می‌شوند. گفته شد که در مدل برنامه‌ریزی خطی روابط از نوع خطی هستند. روابط خطی، یکی از ساده ترین روابطی هستند که برای حل آنها می‌توان از شیوه‌ی «ترسیمی» استفاده کرد. روش ترسیمی در مدلهای برنامه‌ریزی خطی به مدل هایی محدود می‌شود که حداکثر دارای دو متغیر تصمیم هستند. برای حل این نوع مدلها می‌توان از یک دستگاه مختصات استفاده کرد. استفاده از شیوه‌ی ترسیمی برای مدل هایی که سه متغیره هستند، نیز با استفاده از دستگاههای سه بعدی تا حدودی امکان‌پذیر است، ولی چنانچه تعداد متغیرهای تصمیم بیش از ۳ باشد، حل مدل به شیوه ترسیمی به هیچ وجه امکانپذیر نخواهد بود. اگر چه شیوه ترسیمی حل مدل، صرفاً جنبه‌ی تئوریک دارد، ولی در این فصل به طور مفصل مورد بحث قرار می‌گیرد. چون شیوه

ترسیمی، روش بسیار سادهای برای درک مفاهیم پیچیدهی LP و مفاهیم بعدی کتاب خواهد بود، در ادامه روش ترسیمی را مرحله به مرحله، تشریح می‌کنیم:

۲-۳-۱- تعیین ناحیه موجه

گام نخست را با ذکر مثال شماره۲-۱ در خصوص ترکیب تولید، تشریح می نماییم:

مثال ۲-۱ کارخانهای درصدد تولید دو نوع محصول است که میزان مصرف هر واحد از آنها از منابع (نیروی کار و مواد اولیه) به صورت زیر است. سود حاصل از تولید هر واحد از محصولات نیز داده شده است.

منابع مورد نیاز			
محصول	نیروی کار(نفر-ساعت)	مواد اولیه kg	سود (ریال)
۱	۱	۴	۴۰
۲	۲	۳	۵۰

متغیرهای تقسیم مدل عبارتند از:

X1=تعداد تولید از محصول نوع ۱

X2= تعداد تولید از محصول نوع ۲

تابع هدف عبارت است از حداکثرکردن سود ناشی از تولید:

$$\max z = 40x_1 + 50x_2$$

محدودیتهای مدل به ترتیب شامل محدودیت نیروی کار و محدودیت مواد اولیه خواهد بود.

محدودیت نیروی کار (نفر-ساعت) $x_1 + 2x_2 \leq 40$

محدودیت مواد اولیه (kg) $4x_1 + 3x_2 \leq 120$

علاوه بر محدودیتهای کارکردی فوق، باید محدودیتهای غیرمنفی را برای متغیرهای تصمیم به مدل اضافه کرد. حال کلیت مدل ترکیب تولید، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\max z = 40x_1 + 50x_2$$

S,t:

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

برای حل مدل فوق با استفاده از روش ترسیمی، ابتدا یک دستگاه مختصات تشکیل می‌دهیم که محور افقی آن x_1 و محور عمودی آن با x_2 مدرج می‌شود. سپس به رسم هر یک از محدودیتها در دستگاه مختصات می‌پردازیم. این عمل با در نظر گرفتن هر یک از محدودیتها به صورت یک معادله (خط مستقیم) امکان‌پذیر است. حالا به رسم محدودیت نیروی کار توجه کنید:

ابتدا آن را به صورت خط $x_1 + 2x_2 = 40$ تعریف می‌کنیم.

ساده‌ترین روش برای رسم یک خط، تعیین دو نقطه بر روی محورها و سپس متصل کردن آن نقاط با استفاده از یک خط مستقیم است. نقطه‌ی اول می‌تواند با استفاده از $x_1=0$ سپس حل معادله بر حسب x_2 معلوم می‌شود. یعنی:

$$(0) + 2x_2 = 40$$

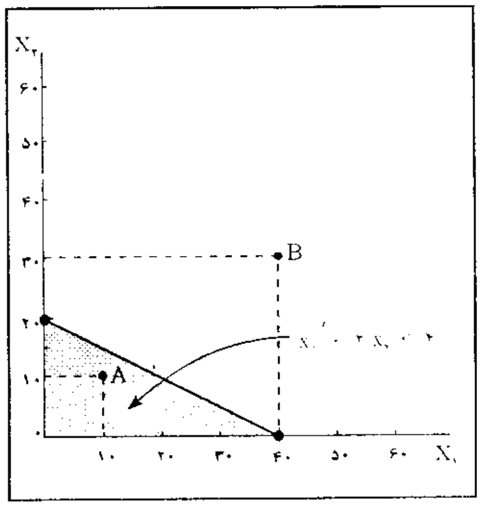
$$x_2 = 20$$

نقطه دوم نیز با $x_2 = 0$ و حل معادله بر حسب x_1 بدست می‌آید. به صورت زیر:

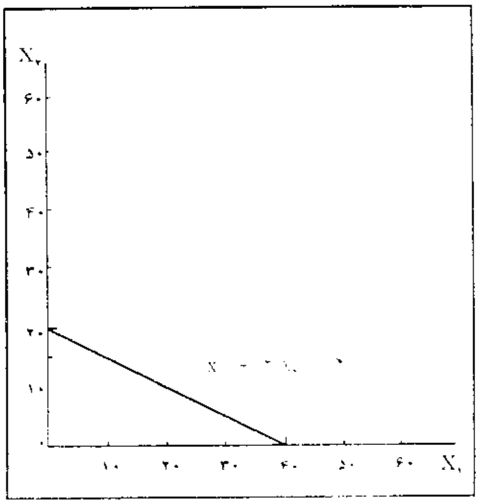
$$x_1 + 2(0) = 40$$

$$x_1 = 40$$

واضح است که نقطه‌ی ($x_1 = 0$ و $x_2 = 20$) بر روی محور عمودی و نقطه‌ی ($x_1 = 40$ و $x_2 = 0$)بر روی محور افقی قرار دارد. حال با استفاده از یک خط مستقیم این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم، همچنانکه در شکل ۱-۳ نشان داده شده است. توجه دارید که برای سادگی در ترسیم، نامعادله به معادله تبدیل شده است. پس «خط» بدست آمده در نمودار بیانگر تمامیت محدودیت نیروی کار نیست. زیرا محدودیت شامل کلیه‌ی نقاط کوچکتر یا مساوی ($\leq$)۴۰ است. نه مقادیر مساوی (=)۴۰ ، ناحیه‌ی مربوط به محدودیت نیروی کار در شکل ۲-۳ به صورت هاشور خورده نشان داده شده است.



شکل ۳.۲ : ناحیه مربوط به محدودیت نیروی کار



شکل ۳.۱ : خط محدودیت نیروی کار

حال آزمون صحت ترسیم ناحیه مربوط به محدودیت اول مدل، با استفاده از بررسی دو نقطه انجام می‌گیرد. نقطه‌ی *A* را در شکل ۲-۳ در نظر بگیرید. این نقطه در تقاطع ($x_1 = 10$ و $x_2 = 20$)قرار دارد. مقدار نقطه‌ی *A* را در محدودیت مربوط جایگذاری کنید:

$$X_1 + 2x_2 \leq 40 \rightarrow 10 + 2(10) \leq 40$$

$$30 \leq 40 \text{ساعت}$$

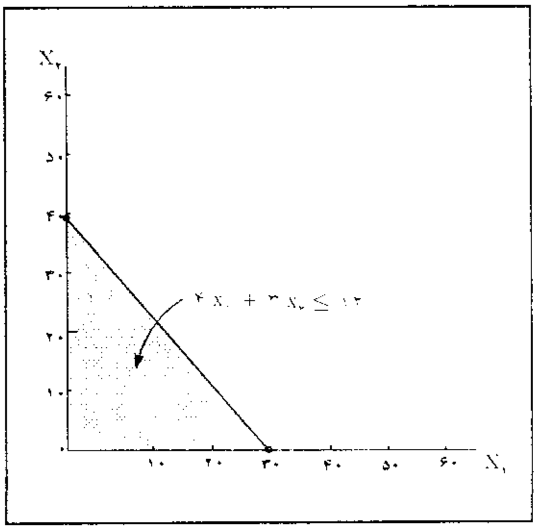
مشخص می‌گردد که نقطه‌ی *A* واقعا جزئی از ناحیه مربوط به محدودیت نیروی کار است. بنابراین از نظر ریاضی، در محدودیت مربوط صدق می‌کند. حال به بررسی نقطه‌ی *B* بپردازید. نقطه‌ی *B* دارای مختصات ($x_1 = 40$ و $x_2 = 30$) است.

ساعت $100 \leq 40$

براساس شکل ۲-۳ نقطه‌ی *B* خارج از ناحیه مربوط به محدودیت نیروی کار، قرار دارد. بنابراین از نظر ریاضی نباید در محدودیت مربوط، صدق کند. همچنانکه بررسی ریاضی نشان می‌دهد مقدار ۱۰۰ کوچکتر یا مساوی ۴۰ نیست.

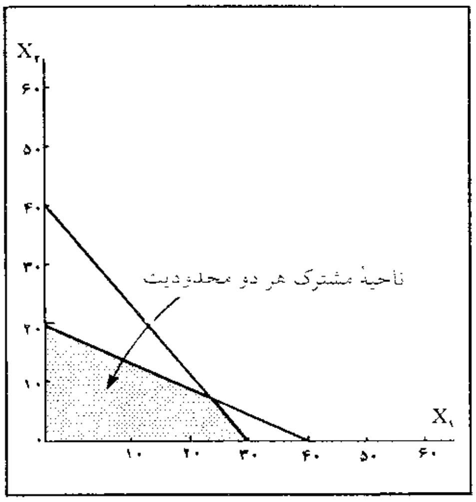
به طریق مشابه، محدودیت مواد اولیه ی مساله ترسیم می‌شود. همچنانکه در شکل ۳-۳نشان داده شده است. خط مربوط به معادله ی دوم مدل، حد فاصل بین نقاط ($x_1 = 0$ و $x_2 = 40$) و ($x_1 = 30$ و $x_2 = 0$) می باشد و

ناحیه‌ی مربوط به نامعادله دوم مدل، به صورت هاشور خورده در منطقه ی کوچکتر یا مساوی ($\leq$) خط قرار گرفته است.

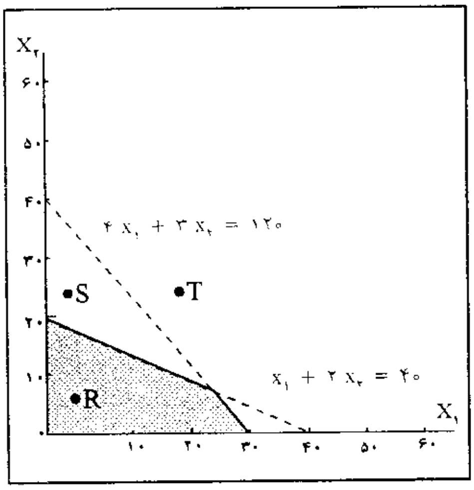


شکل ۳.۳ ناحیه مربوط به محدودیت مواد اولیه

ترکیب دو شکل ۲-۳ و ۳-۳ منجر به نمایش هندسی محدودیتهای مدل به طور همزمان خواهد شد که در شکل ۴-۳ آمده است. ناحیه هاشور خورده در شکل ۴-۳ شامل مجموعه نقاطی است که در هر دو محدودیت صدق خواهد کرد. به عنوان مثال نقاط *T,S,R* را در شکل ۵-۳ در نظر بگیرید، نقطه‌ی *R* هر دو محدودیت مدل را ارضاء می‌کند. بنابراین این نقطه یک «جواب موجه» می باشد. نقطه *S* محدودیت اول را ($x_1 + 2x_2 \leq 40$) نقض می‌کند، ولی در محدودیت دوم ($4x_1 + 3x_2 \leq 120$)صدق می‌کند. بنابراین آن را یک «جواب غیرموجه» می‌گویند. نقطه *T* نیز به طریق مشابه یک نقطه‌ی غیرموجه است، چون در هیچ یک از محدودیتهای مدل صدق نمی‌کند.



شکل ۳.۴ نمایش همزمان دو محدودیت



شکل ۳.۵ ناحیه موجه محدودیتها

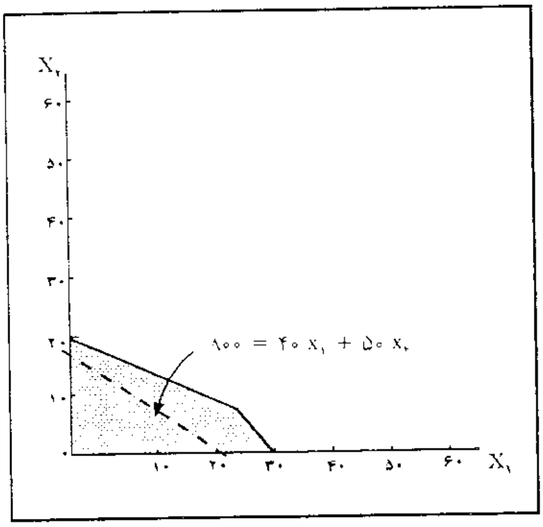
ناحیه‌ی هاشور خورده‌ی شکل ۵-۳ «ناحیه موجه» نامیده می‌شود. زیرا تمامی نقاط این ناحیه، محدودیت های مدل را ارضاء می‌کنند و در آنها صدق می‌نمایند. بنابراین یکی از نقاط این ناحیه، منجر به حداکثر سود شرکت تولیدی در مساله ۲-۱خواهد شد. قدم بعدی در روش ترسیمی حل مدل، یافتن «نقطه‌ی بهینه» است. نقطه‌ی بهینه‌ی این مساله، نقطه‌ای است که سود به ازای آن در ناحیه‌ی موجه، حداکثر می‌شود.

۲-۳-۲- نقطه (جواب) بهینه

قدم دوم در روش ترسیمی حل مدلهای برنامه‌ریزی خطی، تعیین نقطه‌ی موجه‌ای است که بزرگترین مقدار سود به ازاء آن حاصل می‌شود. برای بدست آوردن این نقطه ابتدا تابع هدف را به ازای یک مقدار دلخواه ترسیم کنید. برای مثال اگر مقدار سود Z ۸۰۰ ریال باشد، تایع هدف عبارت خواهد بود از:

$$40x_1 + 50x_2 = 800$$

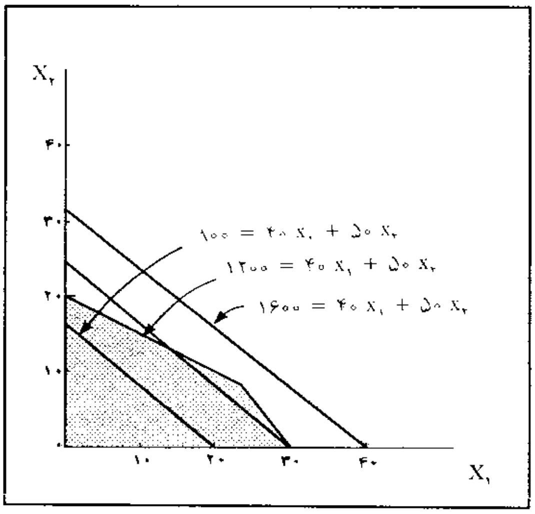
ترسیم این خط کاملا شبیه رویه‌ی ترسیم خطوط مربوط به محدودیت ها می‌باشد. نمایش هندسی این تابع در شکل ۶-۳ به صورت خط‌چین آمده است. همچنانکه واضح است، تمام نقاط خط مربوط به سود ۸۰۰ ریال در ناحیه موجه مدل قرار گرفته است. خط بدست آمده نشان می دهد که هر ترکیبی از x_1وx_2 بر روی این خط ارزش معادل ۸۰۰ ریال برای z به همراه دارد.



شکل ۳.۶ خط تابع هدف به ازای ۸۰۰ = Z ریال

همچنانکه شکل ۶-۳ نشان می‌دهد، هنوز امکان افزایش سود از ۸۰۰ ریال به مقادیر بالاتر وجود دارد. چون بخشی از مقادیر موجه برای X_1 و X_2 وجود دارند که بالاتر از خط *Z=800* ریال قرار گرفته‌اند. برای مثال به مقادیر ۱۲۰۰ ریال و ۱۶۰۰ ریال برای تابع *Z* در شکل ۷-۳ توجه کنید.

همچنانکه در شکل ۷-۳ مشخص شده است، بخشی از خط *Z=1200* ریال خارج از ناحیه موجه قرار گرفته است، ولی بخشی از خط هنوز در داخل ناحیه موجه قرار دارد.



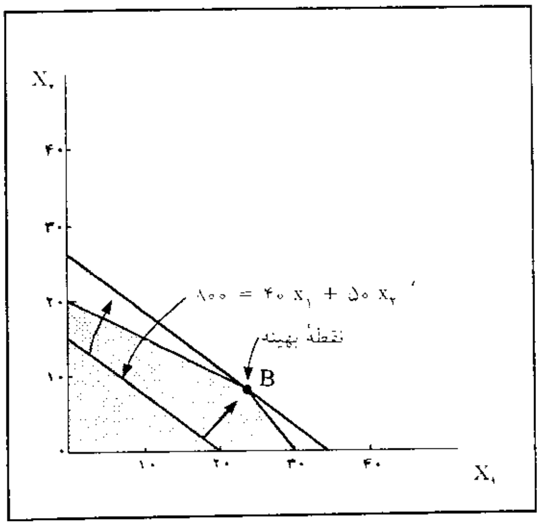
شکل ۳.۷ خطوط تابع هدف برای مقادیر Z= ۸۰۰، Z= ۱۲۰۰ و Z= ۱۶۰۰ ریال

بنابراین، این خط نشان می‌دهد که هنوز نقاط موجهی وجود دارند که امکان افزایش سود را از ۸۰۰ ریال به ۱۲۰۰ ریال و یا بیشتر دارند. این امر بدین معنی است که هیچ نقطه‌ی موجهی وجود ندارد که سود حاصل از آن ۱۶۰۰ ریال باشد. بنابراین مشخص می‌شود که حداکثر سود حاصل از تولید محصولات کارخانه کمتر از ۱۶۰۰ ریال و بیشتر از ۱۲۰۰ ریال است.

با بررسی شکل ۷-۳ مشاهده می‌شود که با دور شدن خط تابع هدف از مبدأ مختصات ($x_1 = 0$ و $x_2 = 0$) بر مقدار سود افزوده می‌شود. با عنایت به این خاصیت می‌توان گفت: «حداکثر سود در نقطه‌ای حاصل خواهد شد که خط تابع هدف ضمن مماس بودن بر یک نقطه‌ی موجه نسبت به مبدأ مختصات در دورترین فاصله قرار گیرد.» این نقطه در مثال ما، نقطه *B* است که در شکل ۸-۳ نشان داده شده است.

برای پیدا کردن نقطه‌ی *B*، خط مربوطه *Z=800* را به سمت بالا انتقال دهید. بدیهی است، خطوط موازی بی شماری با خط $40x_1 + 50x_2 = 800$ قابل ترسیم است.

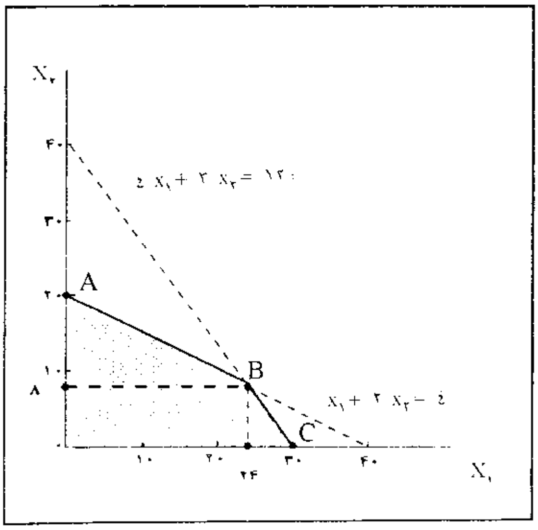
خط *z=800* را آنقدر به سمت بالای ناحیه موجه انتقال دهید تا به آخرین نقطه‌ی ناحیه‌ی موجه برسید. این نقطه همان نقطه‌ی *B* است. پس آخرین نقطه‌ی موجه بهترین نقطه ای است که حداکثر سود، *Z*، به ازاء آن حاصل خواهد شد، بنابراین، « جواب بهینه» بهترین جواب موجه است.



شکل ۳.۸ تعیین نقطه (جواب) بهینه

۲-۳-۳-تعیین مقادیر متغیرهای تصمیم

سومین مرحله در رویکرد ترسیمی حل مدل *LP* بدست آوردن مقادیر x_1 و x_2 در نقطه‌ی بهینه است در مثال ما، همچنانکه از شکل ۹-۳ بر می آید، می‌توان به طریق ترسیمی دریافت که نقطه‌ی *B* در تقاطع ($x_1 = 24$ و $x_2 = 8$) قرار دارد. این نحوه‌ی استخراج مقادیر متغیرهای تصمیم در صورتی امکان دارد که ترسیم هندسی محدودیت ها با دقت زیادی انجام گرفته باشد.



شکل ۳.۹ تعیین مقادیر جواب به روش هندسی

چنانچه در ترسیم نمودار، دقت لازم به عمل نیاید، ناچاریم مقادیر متغیرهای تصمیم را به طور تقریبی استخراج کنیم. حال برای تعیین مقادیر جواب، به رویه‌ای اشاره خواهد شد که به عنوان یک قاعده‌ی کلی قابل استفاده در کلیه‌ی موارد ترسیمی است. برای ارائه ی این قاعده، ابتدا ناچاریم چند خاصیت نقطه‌ی جواب را بیان کنیم.

در شکل ۸-۳ همچنانکه تابع هدف افزایش می‌یابد، به نقطه ای می رسیم که آخرین نقطه‌ی ناحیه ی موجه است. این نقطه در «مرز» ناحیه موجه قرار دارد. پس «نقطه‌ی بهینه همواره در مرز ناحیه موجه قرار دارد». چون نقاط مرزی شامل دورترین نقاط نسبت به مبدأ مختصات هستند. این ویژگی مسائل برنامه‌ریزی خطی، باعث می‌شود که تعداد نقاط کاندیدا برای جواب بهینه، به شدت کاهش یابد. با این وجود باز می‌توان تعداد نقاط کاندیدا برای جواب بهینه را با استفاده از خاصیت دیگر برنامه‌ریزی خطی، کاهش داد.

جواب بهینه، علاوه بر قرار گرفتن در مرز ناحیه ی موجه، «همواره بر روی یک گوشه» از مرز، قرار دارد. گوشه، شامل نقطه ای است که در تقاطع «حداقل دو خط» از خطوط مرزی قرار می‌گیرد. مواد اولیه ($4x_1 + 3x_2 \leq 120$)و همچنین خطوط (محورهای) مربوط به $x_1 \geq 0$و $x_2 \geq 0$ می‌باشد. گوشه های بدست آمده (نقاط *C,B,A*) در شکل ۹-۳ «نقاط حدی» هستند. علت نام‌گذاری آن ها این است که براساس این نقاط«حد» ناحیه ی موجه، مشخص می‌شود. می توان به طریق ریاضی ثابت کرد که در برنامه‌ریزی خطی «جواب بهینه همواره در نقطه‌ی حدی» قرار دارد. بنابراین در مثال ما جواب بهینه، به یکی از نقاط *C,B,A* محدود می‌شود. نقطه‌ی حدی بهینه، آخرین نقطه ای است که خط تابع هدف در ناحیه موجه بر آن مماس می‌شود. این خاصیت در شکل ۸-۳ نشان داده شده است.

از شکل ۹-۳ در می‌یابیم که جواب بهینه، گوشه‌ی *B* است. از آنجا که نقطه *B* از تقاطع دو خط مرزی $x_1 + 2x_2 = 20$و $4x_1 + 3x_2 = 120$ بوجود آمده است، پس می‌توان با حل همزمان این دو معادله مقادیر x_1 و x_2 را بدست آورد.

$$\text{دستگاه معادلات}\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 & \text{معادله } 1 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 & \text{معادله } 2 \end{cases}$$

طرفین معادله (۱) را در ۴-ضرب کرده و مجددا دستگاه معادلات را بنویسید:

$$\begin{cases} -4x_1 - 8x_2 = -160 \\ \ \ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases}$$

حال با حذف x_1 از دستگاه معادلات داریم:

$$-5x_2 = -40$$

$$x_2 = 8$$

بنابراین با مشخص شدن مقدار x_2 می توان به کمک یکی از معادلات اصلی، مقدار x_1 را نیز تعیین کرد. پس به کمک معادله (۱) داریم:

$$x_1 + 2(8) = 40$$

$$x_1 = 24$$

حال مقدار تابع هدف؛ z، را به ازاء گوشه ($x_1 = 24$ و $x_2 = 8$)تعیین می‌کنیم:

$$z = 40x_1 + 50x_2$$

$$z = 40(24) + 50(8)$$

Z=1360 ریال

بنابراین با استفاده از رویه‌ی فوق، مشخصات هر یک از گوشه های موجه را بدست آورده و در جدول ۲-۱ خلاصه کرده ایم.

جدول ۲-۱ مشخصات نقاط حدی (گوشه‌های موجه)

مقدار تاربع هدف (Z)	مختصات (X_1 و X_2)	نام گوشه
Z=1000	$(x_1 = 0, x_2 = 20)$	A
Z*=1360	$(x_1 = 24, x_2 = 8)$	B
Z=1200	$x_1 = 30, x_2 = 0)$	C

پرواضح است که گوشه‌ی B، بهترین گوشه است. چون نسبت به سایر نقاط حدی (C,A) دارای سود بیشتری است و از آنجا که براساس خاصیت مدلهای برنامه‌ریزی خطی، جواب بهینه همواره بر روی گوشه قرار دارد، پس این نقطه، همان جواب بهینه‌ی مدل ترکیب تولید در مثال ۲-۱ خواهد بود.

تحلیل مثال فوق و مفاهیم بیان شده، در حل ترسیمی ما را به سه خاصیت اساسی برای جوابهای گوشه موجه می‌رساند.
خاصیت اول، رابطه ی این جوابها با جواب بهینه را بیان می‌کند.

خاصیت ۱) جواب بهینه ی مساله برنامه‌ریزی خطی، «قطعاً» یکی از جوابهای گوشه‌ی موجه است. این خاصیت در شکل ۹-۳ به وضوح دیده می شود. علیرغم اینکه مدل دارای نقاط مرزی متعددی است. جواب بهینه نقطه‌ی Bاست که از تقاطع دو خط مرزی تشکیل شده است، یعنی گوشه می‌باشد.

خاصیت ۲) تعداد جوابهای گوشه موجه «متناهی» است.

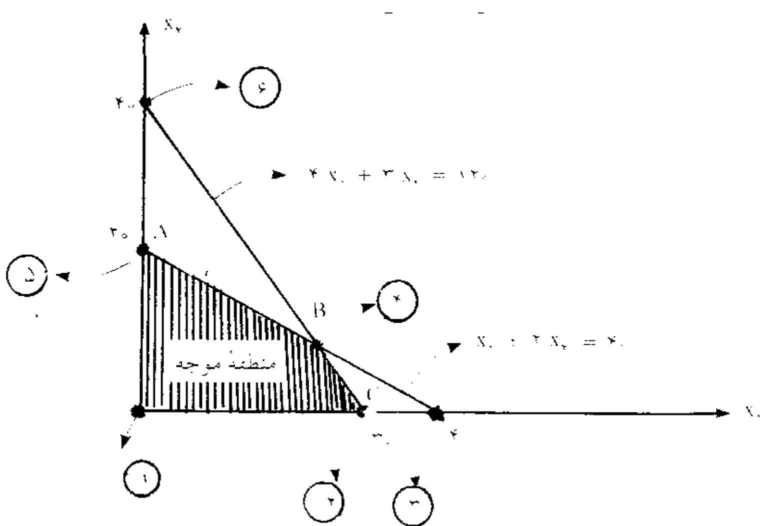
در مثال ۲-۱ که فقط ۴ گوشه ی موجه وجود دارد، این خاصیت بدیهی به نظر می‌رسد. برای اینکه متوجه شوید که چرا در حالت کلی تعداد جوابهای گوشه موجه متناهی است، یادآوری می‌کنیم که هر جواب گوشه ی موجه جواب، همزمان یک دستگاه n معادله‌ای است که از بین (m+n) معادله محدودیت انتخاب شده است. تعداد ترکیبات مختلف انتخاب nمعادله از میان (m+n) معادله موجود برابر با:

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}$$

است، که عددی قابل شمارش است. البته این عدد در حقیقت «حداکثر» تعداد جوابهای گوشه موجه را نشان می‌دهد. در مثال ۲-۱ که تعداد متغیر تصمیم دو (n=2) و تعداد محدودیتهای کارکردی مساوی 2(m=2) می‌باشد، تعداد

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

گوشه برای مدل وجود دارد که فقط ۴ مورد آنها موجه است، شکل ۱۰-۳ به خوبی تعداد گوشه‌های مدل را به طریق ترسیمی نشان می دهد.



شکل ۳.۱۰

با استفاده از خاصیت ۲ و پس از انجام محاسبات لازم، جواب بهینه ی مساله بدست آمد. به عبارت دیگر، با بدست آوردن و مقایسه کردن تمام جواب های گوشه ی موجه که تعدادی متناهی است، سرانجام جواب بهینه بدست خواهد آمد. جدول ۱-۳، حاصل استفاده از خاصیت ۲ را بخوبی نشان می‌دهد.

خاصیت ۳) چنانچه یک جواب گوشه ی موجه از تمام جوابهای گوشه موجه «مجاور» خود (از نقطه نظر تابع هدف) بهتر باشد، در این صورت از تمام جوابهای گوشه ی موجه بهتر خواهد بود (یعنی جواب بهینه است).

در شکل ۱۰-۳ بخوبی می‌توان صحت خاصیت ۳ را دریافت. در شکل مشخص است که گوشه‌ی B نسبت به دو گوشه‌ی موجه مجاور خود، یعنی A,C بهتر است چون بر اساس جدول ۲-۱ از مقدار Z بیشتری برخوردار است. پس این گوشه، جواب بهینه‌ی مدل است. در حالی که گوشه ی A نسبت به دو گوشه‌ی موجه مجاور خود، یعنی مبدأ مختصات ($x_1 = 0$ و $x_2 = 0$) و B از چنین خاصیتی برخوردار نیست. یعنی علیرغم بهتر بودن نسبت به مبدأ مختصات، از مقدار Z کمتری نسبت به B برخوردار است. پس این گوشه‌ی موجه قطعاً بهینه نخواهد بود. «اهمیت خاصیت ۳ در آن است که برای بدست آوردن جواب بهینه لازم نیست تا تمام جوابهای گوشه موجه را آزمایش کرد.»

حال با توجه به مفاهیم بیان شده و خواص سه‌گانه‌ی حل مدل برنامه‌ریزی خطی، مراحل رویکرد ترسیمی حل مدل LP به صورت زیر خلاصه می‌شود:

۱-محدودیتهای مدل را در قالب یک معادله در دستگاه مختصات رسم کنید. با توجه به نوع نامعادله ناحیه ی موجه را تعیین کنید (فضای مشترک محدودیتها را هاشور بزنید).

۲-تابع هدف را به ازای یک مقدار دلخواه ترسیم کنید، سپس خط تابع هدف را برای تعیین نقطه‌ی بهینه به سمت مناسب انتقال دهید. نقطه‌ی بهینه، آخرین نقطه‌ی ناحیه‌ی موجه است که تابع هدف بر آن مماس می‌شود.

۳-دستگاه معادلات مشترک گوشه‌ی بهینه را حل کنید تا مقادیر متغیرهای تصمیم در گوشه‌ی بهینه تعیین گردد.

«یا»

۲-دستگاه معادلات مربوط به هر یک از گوشه‌های ناحیه موجه را حل کنید تا ارزش متغیرهای تصمیم در هر گوشه تعیین شود.

۳-مقادیر گوشه‌های موجه را در تابع هدف جای‌گذاری کنید، تا مقدار Z به ازای آن گوشه مشخص شود. ضمن مقایسه‌ی مقدار Z، گوشه‌ی بهینه را معین کنید.

۲-۴- روش حل ترسیمی برای یک مدل حداقل سازی

مثال ۲-۱ مراحل حل روش ترسیمی مدل برنامه‌ریزی خطی را که هدف آن حداکثر کردن سود بود. نشان داد. به عبارت دیگر تابع هدف مساله بیان شده در مثال ۲-۱ از نوع «Max» (حداکثرسازی) بود. چنانچه یک مدل برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف «minimize (min)- حداقل سازی- دو متغیره نیز وجود داشته باشد، می‌توان به حل آن با استفاده از روش ترسیمی پرداخت.

مثال ۲-۲ مدل حداقل سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min z = 6x_1 + 3x_2$$

S,t:

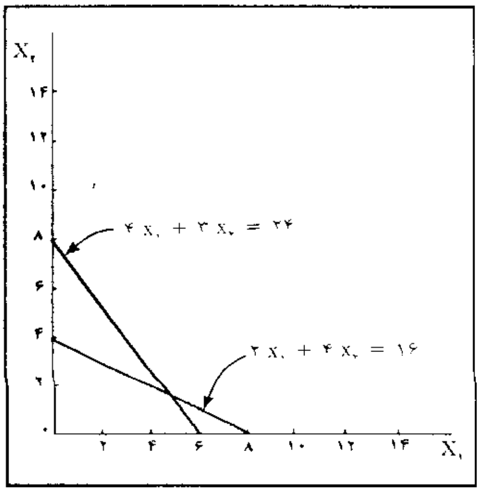
$$2x_1 + 4x_2 \geq 16$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مراحل حل ترسیمی مدل فوق کاملاً مشابه مدل حداکثرسازی است که به شرح زیر به ذکر آنها برای رسیدن به جواب بهینه‌ی مدل فوق می‌پردازیم.

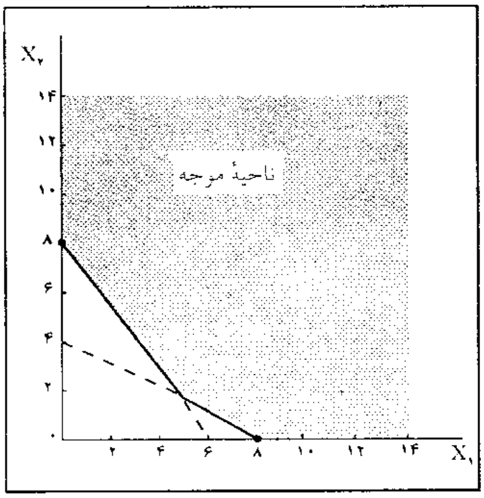
اولین قدم، رسم معادلات مربوط به دو محدودیت مدل است. همچنانکه در شکل ۱۱-۳ نشان داده شده است.



شکل ۳.۱۱ معادلات مربوط به محدودیتهای مثال ۳.۲

حال ناحیه‌ی مشترک موجه هر دو محدودیت را پیدا می‌کنیم. به طوری که قیود بزرگتر یا مساوی ($\geq$)مربوط به هر دو محدودیت را بیان کند. منطقه‌ی هاشور خورده، در شکل ۱۲-۳ نیز به خوبی این مهم را نشان می‌دهد.

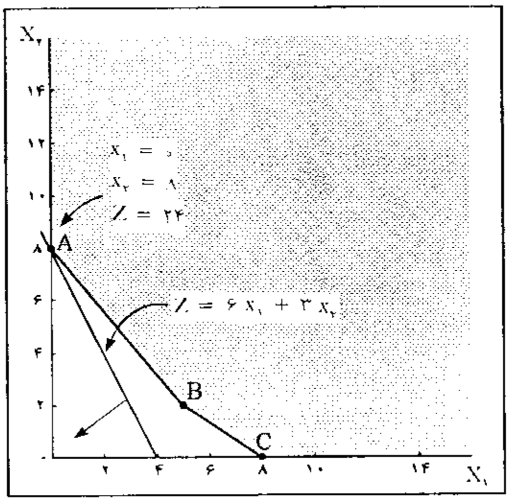
بعد از پیدا کردن ناحیه موجه، قدم دوم، تعیین دوم گوشه‌ی بهینه است.



شکل ۳.۱۲ ناحیه موجه مدل مثال ۳.۲

به خاطر دارید که در مدل حداکثر بهسازی ، بهترین نقطه‌ی مرزی، نقطه‌ای بود که دارای «بیشترین» فاصله نسببت به مبدأ مختصات بود. برعکس در مدل حداقل‌سازی، بهترین نقطه‌ی مرزی نقطه‌ای است که دارای «کمترین» فاصله نسبت به مبدأ مختصات باشد. به عبارت دیگر در مدل حداکثر سازی، گوشه‌ی بهینه، «دورترین گوشه‌ی حدی» نسبت به مبدأ مختصات است، ولی در مدل حداقل سازی، گوشه‌ی بهینه، «نزدیکترین گوشه‌ی حدی» به مبدأ مختصات است. چون هر چه مقدار

متغیرهای تصمیم کوچکتر باشد، مقدار z کمتر خواهد بود. مفاهیم فوق در قالب شکل ۱۳-۳ به خوبی بیان شده‌اند. شکل ۱۳-۳ نقاط گوشه‌ای (C,B,A) و خط تابع هدف را نشان می‌دهد. همچنانکه تابع هدف به سمت پایین (مبدأ مختصات) انتقال می‌یابد، آخرین نقطه‌ای که تابع هدف از منطقه‌ی موجه با آن مماس می‌شود، نقطه‌ی A است. به عبارت دیگر، گوشه‌ی A آخرین گوشه‌ای است که بدون غیرموجه شدن خط تابع هدف، مقدار z را حداقل می‌کند.



شکل ۳.۱۳ جواب (گوشه) بهینه

آخرین مرحله در روش ترسیمی، پیدا کردن مقادیر x_2, x_1 در گوشه‌ی A است. از آنجا که گوشه‌ی A از تقاطع معادلات مرزی $x_1 = 0$ و $4x_1 + 3x_2 = 24$ حاصل شده است، پس داریم:

$$x_1 = 0$$

$$2(0) + 3x_2 = 24$$

$$x_2 = 8$$

بنابراین گوشه‌ی بهینه‌ی مدل در مثال ۲-۳ عبارت است از ($x_1 = 0$ و $x_2 = 8$) مقدار هزینه‌ی تولید به ازاء گوشه‌ی بهینه z، برابر است با:

$$z = 6x_1 + 3x_1$$

$$z = 6(0) + 3(8)$$

Z=24

به طریق مشابه می‌توان مختصات گوشه‌های *C,B* را پیدا کرد که توصیه می‌شود دانشجویان عزیز به عنوان «تمرین» این کار را انجام دهید.

۲-۵- موارد خاص در برنامه‌ریزی خطی

در بخشهای قبلی این فصل، اشکال اساسی و استاندارد برنامه‌ریزی خطی به صورت حداکثر سازی (*max*) و حداقل‌سازی(*min*) بیان شد. با این وجود، موارد خاصی از مسائل برنامه‌ریزی خطی وجود دارد. اگر چه این دسته از مدلهای برنامه‌ریزی خطی، کمتر در دنیای واقعی رخ می‌دهند، ولی در اینجا با چگونگی تشخیص آنها و خواص هر یک آشنا می‌شویم.

موارد خاص در برنامه‌ریزی خطی شامل حالتهای زیر است:

۱-جواب بهینه جداگانه

۲-فاقد ناحیه موجه (جواب)

۳-ناحیه جواب بیکران

۴-جواب تبهگن

حال به تشریح هر یک از موارد فوق می‌پردازیم.

۲-۵-۱-جواب بهینه چندگانه

مسائل برنامه‌ریزی خطی در فرم استاندارد دارای یک نقطه (گوشه) بهینه هستند. تابع هدف در این گوشه، حداقل یا حداکثر می‌گردد. جواب بهینه در مقایسه با سایر جوابهای مدل برنامه‌ریزی خطی، بهترین است. فرم خاصی از مدلهای برنامه‌ریزی خطی وجود دارد که بیش از یک گوشه‌ی بهینه دارند. در این نوع مدلها تعداد نقاط بهینه، بی‌نهایت است. به عنوان نمونه به مثال ۲-۳ توجه کنید.

مثال ۲-۳ مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max Z = 40x_1 + 30x_2$$

S,t:

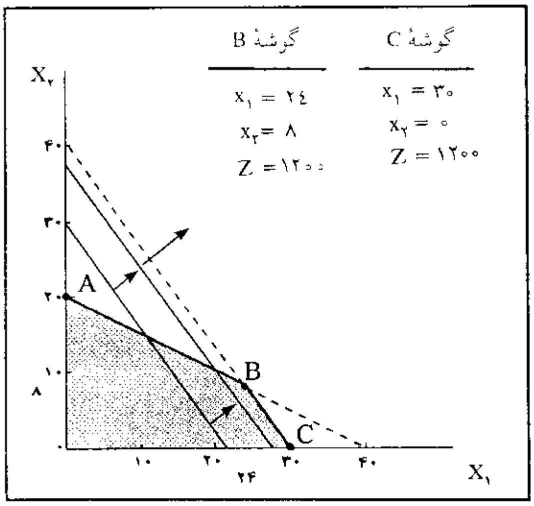
$$x_1 + 2x_2 \le 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \le 120$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

نمایش هندسی، حل این مدل در شکل ۱۴-۳ دیده می‌شود.

همچنانکه در شکل دیده می‌شود خط تابع هدف، موازی با خط محدودیت $4x_1 + 3x_2 \le 120$ قرار گرفته است. به عبارت دیگر شیب هر دو خط با همدیگر یکسان است. بنابراین همچنان که خط تابع هدف به بالا انتقال می‌یابد، بجای مماس شدن با یک نقطه حدی، بر پاره‌خط رابط نقاط *C,B* منطبق می‌شود. این بدان معنی است که تمامی نقاط قرار گرفته بر روی پاره‌خط *BC* جزء نقاط بهینه‌ی مدل قرار می‌گیرند و به عبارت بهتر، هر نقطه بر روی این پاره‌خط سودی مساوی *(Z=1200)1200* خواهد داشت. این نوع مدلها را در برنامه‌ریزی خطی، مدلهای دارای «جواب بهینه چندگانه» گویند. با توجه به اینکه در برنامه‌ریزی خطی به دنبال گوشه بهینه (خاصیت ۱) خواهیم بود، پس نقاط انتها پاره‌خط *BC* به عنوان گوشه های بهینه تعریف می‌شوند. گوشه‌های بهینه‌ی *C,B*، جوابهای بهینه‌ی «جایگزین» همدیگر نیز گفته می‌شوند.



شکل ۳.۱۴ نمایش هندسی مثال ۳.۳ با جواب بهینه چندگانه

مدیران برای تصمیم‌گیری، درصدد یافتن سناریوهای تصمیم‌گیری متفاوت، با سود حداکثر هستند. با این نگاه جواب بهینه‌ی چندگانه برای مدیران خشنودکننده نیز هست! چون مدیر در تصمیم‌گیری خود دارای انعطاف‌پذیری لازم و قدرت مانور مناسب خواهد بود. به عنوان نمونه در مثال ۲-۳ مدیر با دو سناریوی بهینه روبرو است. که با توجه به شرایط تصمیم‌گیری می

تواند سناریوی مناسب خود را انتخاب کند. چنانچه شرایط بازار تنوع کالا را بطلبد، می‌تواند از گوشه‌ی *B* استفاده کند، یعنی ($x_1 = 24$ و $x_2 = 8$)و اگر بازار شرایط حجم تولید در یک کالا را طلب می‌کند، از نقطه‌ی *c* استفاده خواهد کرد.

۲-۵-۲- فاقد ناحیه موجه (جواب)

در برخی از مسائل برنامه‌ریزی خطی، نمی‌توان برای کلیه‌ی محدودیت های مدل ناحیه‌ی مشترک پیدا کرد. بنابراین، مساله فاقد ناحیه‌ی موجه خواهد بود. در این گونه مدلها پیدا کردن جواب بهینه، بی معنا است. نمونه‌ی این دسته از مدلها را در مثال ۲-۴خواهید دید.

مثال ۲-۴ مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max Z = 5x_1 + 3x_2$$

S,t:

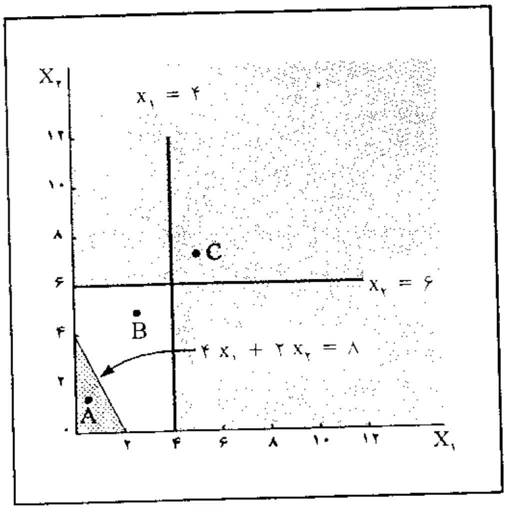
$$4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

شکل ۱۵-۳ بیانگر منطقه‌ی موجه هر یک از محدودیتهای مدل فوق است. همچنان که مشخص است، محدودیتهای مدل دارای ناحیه ی مشترک نیستند. به عبارت دیگر محدودیت های مدل در تناقض با همدیگر هستند. بنابراین نمی‌توان برای همه‌ی آنها ناحیه‌ی مشترک پیدا کرد.



شکل ۳.۱۵ نمایش هندسی مدل مثال ۳.۴ فاقد ناحیه موجه

نقطه‌ی *A* در شکل فوق فقط محدودیت $4x_1 + 2x_2 \leq 8$ را ارضاء می‌کند و نقطه‌ی *B* در هیچ یک از آنها صدق نمی‌کند، از آنجا که هیچ نقطه‌ای نمی توان یافت که در هر سه محدودیت صدق کند، پس مدل مثال ۲-۴ فاقد ناحیه موجه است و قابل حل نیست. آنچه مسلم است، مدلهای فاقد ناحیه ی موجه، در عالم واقع وجود خارجی ندارند. علت بروز چنین مدلهایی تعریف نادرست مساله و مشاهدات غیرواقعی از محیط سازمانی است. گاهی اوقات نیز علیرغم تعریف صحیح مساله و مشاهده‌ی درست، در فرموله کردن مساله دچار خطا می‌شوند، در نتیجه چنین مدلی ایجاد می شود با مشاهده‌ی چنین وضعیتی برای مدل مساله، باید درصدد رفع عیب آن برآمد.

۲-۵-۳- ناحیه جواب بیکران

در برخی از مسائل ناحیه موجه مدل طراحی شده، به وسیله‌ی محدودیتها محصور نمی‌شود. به عبارت دیگر ناحیه ی موجه در میان معادلات مرزی بسته نمی‌شود. در چنین مدلهایی ممکن است تابع هدف به نحو نامحدودی افزایش (کاهش) یابد و هیچ‌گاه به نقطه‌ی حداکثر (حداقل) نرسد. مدل ارائه شده در مثال ۲-۵ نمونه‌ی خوبی از چنین مدل هایی است.

مثال ۲-۵ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\max Z = 4x_1 + 2x_2$$

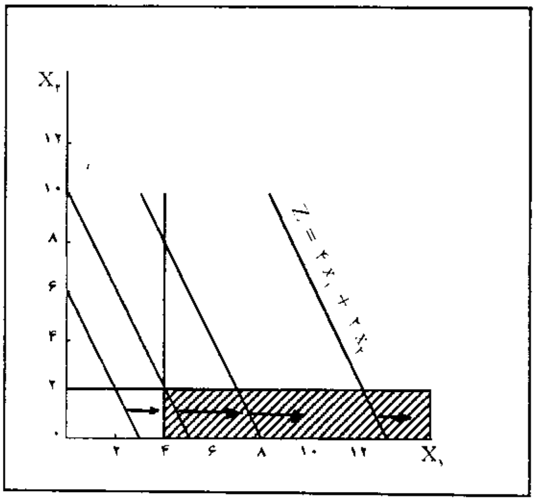
S,t:

$$x_1 \geq 4$$

$x_2 \geq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

در شکل ۱۶-۳ نشان داده شده است که چگونه تابع هدف این مدل بدون هیچ‌گون حد و مرزی در حال افزایش است، به طوری که هیچ‌گاه جواب بهینه حاصل نمی‌شود.



شکل ۳.۱۶ نمایش هندسی مسأله با ناحیه موجه بیکران بدون گوشهٔ بهینه

واضح است که سود نامحدود در عالم واقع غیرممکن است. بنابراین چنین مورد خاصی از برنامه‌ریزی خطی، وجود خارجی ندارد. علت پدید آمدن چنین حالتی، اشتباه در تعریف مساله و یا اشتباه در فرموله کردن آن خواهد بود.

مدلهایی از برنامه‌ریزی خطی وجود دارند که علیرغم بیکران بودن ناحیه ی موجه، دارای جواب بهینه گوشه‌ای هستند . نمونه‌ای از این نوع مدلها در مثال ۲-۶ و شکل ۱۷-۳ دیده می‌شود.

مثال ۲-۶ مدل زیر را در نظر بگیرید:

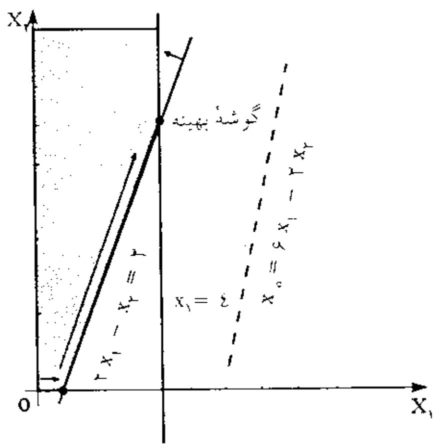
$\max Z = 6x_1 - 2x_2$

S,t:

$2x_1 - x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 4$

$X_1, x_2 \geq 0$



شکل ۳.۱۷ ناحیه جواب بیکران با جواب گوشه بهینه

همچنانکه از روش ترسیمی حل مثال ۲-۶ مشخص می‌شود، فضای موجه مساله، بیکران است و می‌توان گوشه‌ای را پیدا کرد که تابع هدف به ازای آن گوشه، حداکثر می‌شود. بنابراین، این نوع مدلها را مدلهای دارای «ناحیه جواب بیکران دارای گوشه بهینه» گویند. گوشه‌ی بهینه در مدل فوق عبارت است از : $(x_2 = 6, x_1 = 4)$که مقدار تابع هدف به ازای آن مساوی است با:

$$Z *= 6(4) - 2(6) = 12$$

۲-۵-۴-جواب تبهگن

برای تشکیل هر گوشه در برنامه‌ریزی خطی، دو معادله ی مرزی کافی است. اگر گوشه‌ای موجه، از بیش از دو معادله ی مرزی تشکیل شود، برخی از معادلات در آن زاید خواهند بود. تعداد معادلات مرزی زاید مساوی است، با تعداد معادلاتی که از گوشه می‌گذارند، منهای ۲ گوشه‌ای که از بیش از دو معادله‌ی مرزی تشکیل شده باشد، که آن را گوشه‌ی «تبهگن» گویند. مثال ۲-۷ و شکل ۱۸-۳ بیانگر مفهوم تبهگنی می‌باشند.

مثال ۲-۷مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max Z = 4x_1 + 6x_2$$

S,t:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$x_2 \leq 3$

$5x_1 + 10x_2 \leq 40$

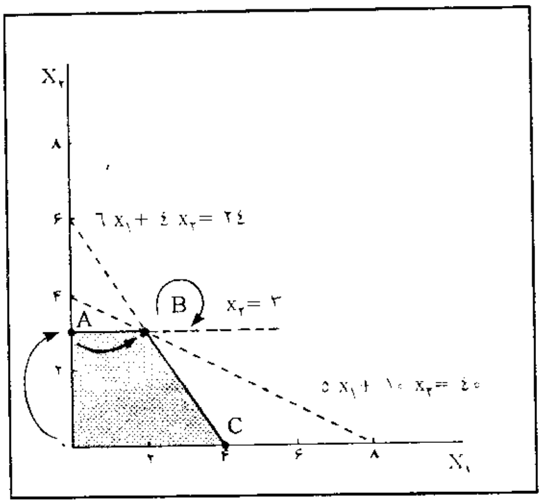
$x_1, x_2 \geq 0$

حال مساله ی فوق به روش ترسیمی در شکل ۱۸-۳ دیده می‌شود. همچنانکه واضح است، جواب بهینه در گوشه‌ی B واقع شده است که ($x_1 = 2$ و $x_2 = 3$) است. گوشه‌ی B از سه معادله مرزی:

$6x_1 + 4x_2 = 24$

$x_2 = 3$

$5x_1 + 10x_2 = 40$



شکل ۳.۱۸ نمایش هندسی جواب تبهگن

تشکیل شده است با توجه به تعریف گوشه، واضح است که یکی از معادلات مرزی فوق زاید است. گوشه‌ی B با ترکیب دو معادله از معادلات فوق بدست می‌آید. چنین گوشه‌ای را «گوشه تبهگن» گویند و مساله‌ای که دارای گوشه‌ی تبهگن باشد، به عنوان یکی از حالتهای خاص برنامه‌ریزی خطی تعریف می‌شود.

پس آن دسته از مدلهای برنامه‌ریزی خطی که دارای گوشه‌ی تبهگن (گوشه بهینه ی تبهگن یا گوشه‌ی موجه تبهگن) باشند، به مدل تبهگن برنامه‌ریزی خطی معروف هستند.

۲-۶-مدل برنامه‌ریزی خطی فرم استاندارد

حل هر مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی با تبدیل آن به یک مدل استاندارد، آغاز می‌شود. یک مساله وقتی دارای شکل استاندارد است که :

- تابع هدف آن ماکزیمم باشد.

- همگی قیدها به صورت $\leq$ باشند؛

- تمامی متغیرها غیرمنفی باشند.

در صورتی که هر یک از سه شرط فوق نقض شوند، شکل مساله استاندارد نخواهد بود.

شکل کلی برنامه‌ریزی خطی مدل استاندارد به شرح زیر است:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$a_{11}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{12}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{1\mathrm{a}}\mathrm{x}_\mathrm{n} \leq \mathrm{b}_1$$

$$a_{21}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{22}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{2\mathrm{a}}\mathrm{x}_\mathrm{n} \leq \mathrm{b}_2$$

$$a_{\mathrm{i}1}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{\mathrm{i}2}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{\mathrm{in}}\mathrm{x}_\mathrm{n} \leq \mathrm{b}_\mathrm{i}$$

$$a_{\mathrm{m}1}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{\mathrm{m}2}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{\mathrm{mn}}\mathrm{x}_\mathrm{n} \leq \mathrm{b}_\mathrm{m}$$

$$\mathrm{x}_\mathrm{j} \geq 0(j = 1, \dots n)$$

۲-۷- متغیرهای کمبود و مازاد

از آنجا که در نامعادلات، انجام عملیات ریاضی مشکل و وقت‌گیر است، در روش سیمپلکس با استفاده از متغیرهای غیرمنفی، نامعادلات مربوط به محدودیتها را به معادله تبدیل می‌کنند. این متغیرها یا به سمت چپ قیدهای $\leq$ اضافه شده آنها را به تساوی تبدیل می‌کنند که در این صورت متغیر کمبود نامیده می‌شوند و یا از سمت چپ قیدهای $\geq$ کم می‌شود که در این حالت متغیر مازاد نامیده می‌شوند. از نماد S_i برای نشان دادن متغیرهای کمبود و مازاد استفاده می‌شود. در صورت اضافه کردن این متغیرها به مساله ی فرم استاندارد، شکل کلی آن به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0\sum_{i=1}^{n} s_i$$

$$a_{11}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{12}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{1a}\mathrm{x}_n \leq \mathrm{b}_1$$

$$a_{21}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{12}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{1a}\mathrm{x}_n + \mathrm{s}_1 = \mathrm{b}_1$$

$$a_{21}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{22}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{2a}\mathrm{x}_a + \mathrm{s}_2 = \mathrm{b}_2$$

$$a_{i1}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{i2}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{in}\mathrm{x}_i + \mathrm{s}_i = \mathrm{b}_i$$

$$a_{m1}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{m2}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{mn}\mathrm{x}_i + \mathrm{s}_m = \mathrm{b}_m$$

$$\mathrm{x}_j \geq 0(j = 1, \dots n)$$

$$\mathrm{s}_i \geq 0(i = 1, \dots m)$$

۲-۸-روش جبری حل مسائل برنامه‌ریزی خطی

برنامه‌ریزی خطی فرم استاندارد، بعد از اضافه کردن متغیرهای کمکی ، $m+1$ معادله‌ی خطی (m معادله مربوط به قید و تابع هدف است) و $m+n+1$ متغیر (شامل z,s,x) خواهد داشت. اما از آنجا که z تابعی از x_j است، با حل همزمان m معادله‌ی مربوط به قیدها که دربرگیرنده‌ی $m+n$ متغیر است، مقدار z نیز به دست خواهد آمد. به این ترتیب یک دستگاه با m معادله و $m+n$ متغیر خواهیم داشت که تعداد جوابهای آن نامعین است (یا بدون جواب است یا تعداد نامحدودی جواب دارد). یکی از روش ها برای تعیین جواب این گونه دستگاهها، کاهش تعداد متغیرها به اندازه‌ای است که تعداد متغیرها با معادلات برابر شوند. بدین منظور به متغیرهای اضافه‌ای که بیش از تعداد معادلات هستند، مقدار صفر داده می‌شود. در روش سیمپلکس نیز این شیوه به کار گرفته می‌شود.

مثال ۲-۸) یک کارگاه کوچک به منظور تولید دو نوع محصول، از ماده ی اولیه‌ای استفاده می‌کند که موجودی آن در ماده ۲۴ واحد است. برای تولید هر واحد محصول «الف»، مصرف ۲ واحد از ماده اول و برای تولید هر واحد محصول «ب» سه واحد از این ماده لازم است. حداکثر تقاضای ماهانه برای این دو محصول به ترتیب ۶ و ۸ واحد است. در صورتی که سود هر واحد از محصول اول و دوم به به ترتیب ۵ و۳ تومان باشد مدل برنامه‌ریزی خطی و نمودار آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

$x_1 \leq 6$

$x_2 \leq 8$

$2x_1 + 3x_2 \leq 24$

$x_1, x_2 \geq 0$

برای حل این مساله، ابتدا باید قیدها را با اضافه کردن سه متغیر کمبود، به تساوی تبدیل کرد:

$\max z = 5x_1 + 3x_2$

$x_1 + s_1 = 6$

$x_2 + s_2 = 8$

$2x_1 + 3x_2 + s_3 = 24$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

این معادله با ۵ متغیر و ۳ قید، بی‌نهایت جواب دارد. برای حل آن کافی است به طور اختیاری ۲=۳-۵ متغیر انتخاب و همزمان به آنها مقدار صفر داده شود. دستگاه سه معادله‌ای سه متغیره‌ای که بدین ترتیب به دست می‌آید، قابل حل و تنها دارای یک جواب خواهد بود. فرض کنید $s_1 = 0$ و $s_2 = 0$ باشد، آنگاه:

$x_1 = 6$

$x_2 = 8$

$2x_1 + 3x_2 + s_3 = 24$

خواهد شد که شامل یک جواب برای مدل برنامه‌ریزی خطی به شرح زیر است:

$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (6,8,0,0,-12), z = 54$

که جوابی غیرموجه است؛ زیرا $s_3 = -12$ بوده و شرط غیرمنفی بودن متغیرها را برآورده نمی‌کند. برای پیدا کردن جواب دیگر، این بار s_1,s_3 را معادل صفر قرار داده، دستگاه را حل می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (6,4,0,4,0), z = 42$$

این جواب موجه است، زیرا در تمامی معادلات صدق کرده و شرط غیرمنفی بودن متغیرها را داراست. هر مرتبه، با انتخاب دو متغیر، که حداقل یکی از آنها جدید باشد، جوابی جدید به دست می‌آید.

برای محاسبه‌ی کلیه‌ی جوابهای ممکن در دستگاه مذکور، که دارای $m=3$ معادله و $m+n=5$ متغیر است، ترکیبات مختلفی از متغیرها وجود دارد که از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!(m+n-m)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

ده جواب وجود دارد که یکی از آنها جواب بهینه ی این مساله است؛ جوابی موجه که مقدار تابع هدف را در بهترین وضعیت قرار می‌دهد.

تعاریف اساسی برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

حل هر مساله ی برنامه‌ریزی خطی، نیازمند تعریف و به کارگیری اصطلاحاتی است که در ادامه به بیان آنها خواهیم پرداخت. در قسمت قبل گفتیم که بعد از اضافه کردن متغیرهای کمبود برای حل دستگاه معادله‌ای با m قید و $m+n$ متغیر، m متغیر را نگاه داشته، n متغیر را مساوی صفر قرار می‌دهیم. Mمتغیر غیرصفر را متغیر پایه و n متغیر مساوی صفر را متغیر غیرپایه می‌نامند. بنابراین متغیرهایی که دارای مقدار صفرند، متغیرهای غیرپایه و متغیرهایی که دارای مقدار غیرصفرند، متغیر پایه نامیده می‌شوند. جواب دستگاه معادله‌ی به دست آمده از حل m معادله و m متغیر جواب پایه نامیده می‌شود. جواب پایه شامل n متغیر صفر نیز هست. جواب پایه موجه، جواب پایه‌ای است که درآن به طور همزمان برای $m+n$ متغیر موجود در دستگاه که n متغیر آن صفر است، شرط غیرمنفی بودن متغیرها صدق کند. عدم برقراری این شرط به جواب پایه‌ای غیرموجه منجر می‌شود. چنانچه جواب پایه‌ای موجه، مقدار تابع هدف را بهینه کند، جواب پایه‌ای موجه بهینه نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که جوابهای پایه‌ای موجه، نشان‌دهنده ی نقاط گوشه‌ی موجه و جوابهای پایه‌ای غیرموجه، نشان‌دهنده ی نقاط گوشه‌ی غیرموجه نیز هستند.

۲-۹-روش سیمپلکس برای حل مسائل استاندارد

۲-۹-۱- اصول اساسی روش سیمپلکس

اگر چه با روش جبری ارائه شده در بخش قبل، امکان حل مسائل برنامه‌ریزی خطی وجود دارد؛ ولی این روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی کارا نیست؛ چون در روش جبری هم جوابهای موجه محاسبه می‌شوند و هم جوابهای غیرموجه. در صورتی که جواب بهینه، جوابی موجه است و پیدا کردن جوابهای غیرموجه، موجب افزایش محاسبات می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان گفت روش جبری، روشی نظام‌مند برای یافتن جواب بهینه در مساله ی برنامه‌ریزی خطی نیست.

روش سیمپلکس که دانتزیگ در سالهای (۶۳-۱۹۵۱) آن را ارائه کرد، به طور اساسی بر مبنای همان اصول جبری ذکر شده در قبل است؛ اما با دو تفاوت:

اول اینکه در روش سیمپلکس جوابهای پایه‌ای منجر به مقادیر نامناسبی برای تابع هدف نمی‌شود(اصل بهینگی).

دوم اینکه جوابهای غیرموجه در طول عملیات سیمپلکس حاصل نمی شود (اصل موجه بودن). علاوه بر این، روش سیمپلکس معیاری جبری برای تعیین جواب بهینه و خاتمه‌ی عملیات (سنجش بهینگی) ارائه می‌کند. بر این اساس، عملیات روش سیمپلکس با یک جواب موجه ابتدایی، شروع و با حرکت بر روی گوشه‌های مجاور موجه بهتر، ادامه می‌یابد. در هر مرحله از عملیات، جواب مطلوبتر شده، در نهایت جواب بهینه به دست می آید. چارچوب این روش برای رسیدن به جواب بهینه چنین است:

قدم ابتدایی: از یک نقطه‌ی گوشه ی موجه ابتدایی شروع کنید.

قدم تکراری: به یک نقطه‌ی گوشه‌ی موجه مجاور بهتر، حرکت کنید.

توقف: هرگاه یک نقطه‌ی گوشه ی موجه از نقاط گوشه‌ی موجه مجاورش بهتر شد، جواب بهینه حاصل شده است و باید توقف کنید.

در روش سیمپلکس، عملیات، همواره با پیدا کردن یک جواب موجه آغاز می‌شود. مساله ی مربوط به مثال ۲-۸ را که قبلاً به روش جبری حل شده است، مجدداً مورد توجه قرار دهید. مساله بعد از اضافه شدن متغیرهای کمبود، به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

$x_1 + s_1 = 6$

$x_2 + s_2 = 8$

$2x_1 + 3x_2 + s_3 = 24$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

چنانچه تعداد *n=2* متغیر برابر صفر قرار گیرد جواب ابتدایی برای این مساله به دست می‌آید؛ یعنی در دستگاه معادله‌ای متشکل از ۵ متغیر و ۳ معادله باید به دو متغیر مقدار صفر اختصاص یابد (دو متغیر غیر پایه‌ای شوند). این دو متغیر یعنی $x_1 = x_2 = 0$، متغیرهای تصمیم هستند. به این ترتیب، سه متغیر کمبود باقی می‌ماند که متغیرهای پایه‌اند و مقدار آنها برابر با اعداد ثابت سمت راست معادلات است ($s_1 = 6$و $s_2 = 8$ و $s_3 = 24$). بنابراین، جواب موجه پایه‌ای ابتدایی برای این مساله عبارت است از:

$z - 5x_1 - 3x_2$ =۰ (۰)

x_1 $+ s_1$ =۶ (۱)

x_2 $+ s_2$ =۸ (۲)

$2x_1 + 3x_2$ $+ s_3$ =۲۴ (۳)

جواب پایه‌ای موجه ابتدایی

$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$s_1 = 6$	$s_2 = 8$	$s_3 = 24$

تذکر: متغیرهای داخل دایره متغیرهای پایه‌ای و اعداد داخل پرانتز شماره ی معادلات هستند.

قبل از ادامه‌ی بحث، به نکات زیر در خصوص خواص جبری جواب پایه‌ای ابتدایی توجه کنید:

۱- معادله‌ی تابع هدف شامل متغیرهای غیرپایه‌ای X_1و x_2 است. به بیان دیگر، ضرایب متغیرهای پایه‌ای S_3, S_2, S_1 در تابع هدف صفرند؛ بنابراین مقدار تابع هدف (z) برابر با صفر است.

۲- هر متغیر پایه‌ای S_3, S_2, S_1 در هر معادله دارای ضریب ۱+ در همان معادله و ضریب صفر در سایر معادلات است. به عبارت دیگر، هر متغیر پایه‌ای در معادله‌ی خود ضریب ۱+ و در بقیه معادلات ضریب صفر دارد.

۳- اعداد سمت راست معادلات مقدار متغیرهای پایه‌ای را نشان می‌دهند و مقدار سایر متغیرها، صفر است.

نکات فوق منحصر به جواب پایه‌ای ابتدایی نیست، بلکه در تمام مراحل سیمپلکس، این خصوصیات صادق است.

۲-۹-۲- جواب پایه‌ای موجه بهتر

بعد از پیدا کردن جواب موجه ابتدایی، جواب پایه‌ای موجه بعدی در چهارگام به دست می‌آید که این چهارگام را یک تکرار می‌نامند.

۱-انتخاب یک متغیر غیرپایه‌ای برای پایه‌ای شدن (انتخاب متغیر ورودی).

۲-انتخاب یک متغیر پایه‌ای برای غیرپایه‌ای شدن (انتخاب متغیر خروجی).

۳-محاسبه جواب پایه‌ای جدید.

۴-بررسی شرط بهینه بودن جواب پایه‌ای جدید (سنجش بهینگی).

اگر جواب موجه و بهینه باشد عملیات خاتمه می‌یابد؛ در غیر این صورت عملیات تا یافتن جواب بهینه یا نتایج دیگری که نشان دهد مسأله «بدون جواب موجه» است یا «جواب نامحدود» دارد، ادامه می‌یابد.

۲-۹-۲-۱- گام اول: انتخاب متغیر ورودی برای جواب پایه‌ای جدید(شرط بهینگی روش سیمپلکس)

مساله ی استاندارد، دارای تابع هدف ماکزیمم بوده، افزایش مقدار تابع هدف تا حد ممکن مورد نظر است. بنابراین، مهمترین انتخاب برای «متغیر ورودی»، می‌تواند موجب بیشترین افزایش در مقدار تابع هدف شود. این امر با انتخاب متغیری صورت می‌پذیرد که بزرگترین ضریب مثبت را در تابع هدف مساله یا بزرگترین ضریب منفی را در تابع هدف مساوی صفر یا در جدول سیمپلکس داشته باشد. برای مثال تابع هدف زیر را در نظر بگیرند:

از آنجا که در این تابع هدف ضریب x_1 دارای بیشترین مقدار مثبت است، باید به عنوان متغیر ورودی انتخاب شود. در صورت انتقال متغیرها به سمت چپ معادله‌ی تابع هدف، معادله‌ی زیر تشکیل می‌شود:

$$\max z - 5x_1 - 3x_2 = 0 \qquad (۰)$$

در این حالت نیز x_1 به دلیل دارا بودن بزرگترین ضریب منفی انتخاب می‌شود.

۲-۹-۲-۲- گام دوم: انتخاب متغیر خروجی برای جواب پایه‌ای جدید(شرط موجه بودن برای روش سیمپلکس)
با ورود متغیر پایه‌ای جدید x_1 به مجموعه متغیرهای پایه، یکی از متغیرهای پایه‌ای فعلی (s_1, s_2یاs_3) باید از مجموعه متغیرهای پایه‌ای خارج و غیرپایه‌ای شود. برای انتخاب متغیر خروجی، ابتدا باید به این نکته توجه کرد که در جواب پایه‌ای جدید، با ورود متغیر جدید، تا آنجا که ممکن است مقدار تابع هدف افزایش یابد (تا حدی که متغیرهای پایه‌ای موجه باقی بماند و مقدار آنها منفی نشود). بنابراین، آن متغیر پایه‌ای، باید برای خروج انتخاب گردد که مقدار آن متغیر با ورود متغیر ورودی به صفر می‌رسد. به منظور درک چگونگی انتخاب متغیر خروجی به معادلات مثال ۲-۹ توجه کنید.

$$x_1 \qquad + s_1 = ۶ \qquad (۱)$$

$$x_2 \qquad + s_2 = ۸ \qquad (۲)$$

$$2x_1 + 3x_2 \qquad + s_2 = 24 \qquad (۳)$$

در معادله‌ی شماره ۲ حداکثر افزایش مجاز مقدار x_1 ۶ است. اگر x_1 از ۶ بیشتر شود، متغیر پایه‌ای s_1 منفی و در نتیجه موجه می‌شود. در معادله ۲ افزایش x_1 تأثیری بر متغیر پایه‌ایی s_2 نمی‌گذارد؛ زیرا ضریب x_1 در معادله ۲ صفر است. در معادله‌ی شماره ۳ افزایش مجاز x_1 حداکثر ۱۲ است ($\frac{24}{2} = 12$) و افزایش آن بیش از ۱۲، مقدار s_3 را منفی و در نتیجه غیرموجه خواهد ساخت. از آنجا که هیچکدام از متغیرهای، s_1, s_2یاs_3 نباید با افزایشx_1 می‌تواند ۶ باشد. شایان ذکر است با افزایش تدریجی x_1 از صفر تا ۶، مقدار s_1 در معادله اول و s_3 در معادله‌ی سوم به تدریج رو به کاهش می‌گذارد (این افزایش تأثیری بر معادله دوم ندارد) و وقتی $x_1 = 6$ شود، s_1 مساوی صفر و s_3 مساوی ۱۲خواهدشد. با افزایش بیشتر x_1 از ۶ مقدار s_1 منفی می‌شود، ولی s_3 تا وقتی که افزایش x_1 کمتر از ۱۲ باشد، همچنان غیرمنفی باقی می‌ماند.
بنابراین، شرط منفی نشدن هر دو متغیر s_1 و s_3 این است که حداکثر افزایش x_1 ۶ باشد.

اصل انتخاب متغیر خروجی را که موجب غیرمنفی شدن کلیه‌ی متغیرها می‌شود، اصل موجه بودن گویند.

در جدول ۲-۲ خلاصه‌ی رویه‌ی انتخاب متغیر خروجی ارائه شده است. برای هر معادله از مجموعه معادلات موجود، نسبت اعداد سمت راست (b_i) به ضرایب مثبت a_{ij}(ضریب متغیر ورودی) محاسبه می‌گردد و متغیر پایه‌ای مربوط به معادله‌ای که کمترین نسبت محاسبه شده را دارد، به عنوان متغیر خروجی انتخاب می‌شود. جدول زیر نحوه‌ی محاسبه متغیر خروجی برای مثال فوق است.

جدول ۲-۲-تصمیم‌گیری در مورد انتخاب متغیر خروجی

$\frac{b_j}{a_{ij}}$ که در آن $a_{ij} > 0$ و x_j متغیر ورودی است	مجموعه معادلات موجود
حداقل $\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{6}{1} = 1 \rightarrow$	$(1)x_1 \quad + s_1 \quad = 6$
	$(2) \quad x_2 \quad + s_2 \quad = 8$
$\frac{b_3}{a_{31}} = \frac{24}{2} = 12$	$(3)2x_1 + 3x_2 \quad + s_3 = 24$
تصمیم: s_1 متغیر خروجی است.	

2-۹-۲-۳-گام سوم: محاسبه جواب پایه‌ای جدید:

طی مراحل قبل متغیر x_1 به عنوان متغیر ورودی جدید انتخاب و وارد مجموعه متغیرهای پایه ای گردید و s_1 به عنوان متغیر خروجی برگزیده شد (جواب پایه‌ای جدید، جزو متغیرهای پایه‌ای نخواهد بود). در این مرحله محاسبات برای به دست آوردن جواب پایه‌ای جدید صورت می‌پذیرد. به منظور پیوستگی کلام، جواب پایه‌ای پیشین را دوباره طرح می‌کنیم.

$$\left.\begin{aligned} z - 5x_1 - 3x_2 \qquad &= 0 \\ x_1 \qquad + s_1 \qquad &= 6 \\ x_2 \qquad + s_2 \quad &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad + s_3 &= 24 \end{aligned}\right\} \qquad (۰)$$

(۱) جواب ابتدایی (x_1 = متغیر ورودی و s_1 =متغیر خروجی)

(۲)

(۳)

در جواب ابتدایی فوق، همان‌طور که مشاهده می‌کنید از پنج متغیر موجود در معادلات ۱، ۲و۳، دو متغیر x_1 و x_2 غیرپایه و دارای مقدار صفرند و سه متغیر ، s_1, s_2یاs_3 پایه‌ای‌هستند. از آنجا که در هر معادله، اولا فقط یک متغیر پایه‌ای وجود دارد و ثانیا این متغیر پایه‌ای ضریب ۱+ دارد دستیابی به مقدار متغیر پایه‌ای به راحتی میسر است. مثلاً در معادله‌ی ۱، متغیر پایه‌ای $s1$ دارای ضریب ۱+ بوده، مقدارش برابر با ۶ است. بنابراین همان‌طور که اشاره شد متغیر پایه‌ای مربوط به هر معادله باید در آن معادله ضریب ۱+ و در سایر معادلات ضریب صفر داشته باشد. در جواب پایه‌ای جدید نیز که ورودی آن s_1 است همین شرط باید برقرار باشد؛ یعنی در معادله‌ی ۱، s_1 متغیر خروجی پایه‌ای نخواهد بود و x_1 متغیر پایه‌ای محسوب می‌شود و باید ضریب x_1 در این معادله ۱+ و در سایر معادلات صفر باشد. معادله متغیر خروجی را سطر لولا و ستون متغیر ورودی را ستون لولا می‌گویند. در این مرحله از محاسبه، معادله ۱ سطر لولا و ضرایب x_1 در کلیه‌ی معادلات تشکیل دهنده، ستون لولاست.

برای اینکه x_1 در معادله ۱ ضریب ۱+ و در سایر معادلات ضریب صفر پیدا کند از روش حذفی گاس- جردن شامل دو دستورالعمل زیر استفاده می‌شود:

۱-ضرب (یا تقسیم) کردن دو طرف یک معادله در (یا بر) یک عدد ثابت غیر صفر. این عمل در سیمپلکس برای سطر لولا صورت می‌پذیرد.

۲-جمع (یا تفریق) مضربی از یک معادله با (یا از) معادله‌ی دیگر. این عمل برای به دست آوردن سایر معادلات انجام می‌شود. به عبارت دیگر مضربی از سطر لولا با سایر معادلات جمع، یا از آنها کسر می‌شود، تا وضعیت جدید این معادله در جواب پایه‌ای جدید مشخص شود.

در این مثال، از آنجا که در سطر لولا (معادله ۱) ضریب x_1 ، ۱ است نیازی به بکارگیری دستورالعمل اول روش گاس- جردن نیست. اما برای حذف x_1 از سایر معادلات ۵ برابر معادله‌ی ۱ را با معادله‌ی صفر و ۲- برابر معادله ۱ را با معادله ۳ جمع می‌کنیم. از آنجا که در معادله ۲ از قبل ضریب x_1 صفر بوده است، از دستورالعمل دوم گاس- جردن استفاده نشده است. با انجام عملیات فوق مجموعه معادلات زیر به دست می آید که بیانگر جواب پایه‌ی موجه جدید است:

$$\left.\begin{array}{l} z - 5s_1 - 3x_2 \qquad = 30 \\ \quad s_1 \qquad + x_1 \quad = 6 \\ \quad x_2 \qquad + s_2 \quad = 8 \\ -2s_1 + 3x_2 \qquad + s_3 = 12 \end{array}\right\} \qquad (۰)$$

(۱) اولین جواب اساسی (تکرار اول)

(۲)

(۳)

بنابراین، جواب پایه‌ای جدید (اولین جواب پایه‌ای، بعد از جواب پایه‌ای ابتدایی) عبارت است از:

$x_2 = 0, s_1 = 0, s_3 = 12, s_2 = 8, x_1 = 6$ که مقدار تابع هدف به ازای این جواب پایه‌ای معادل ۳۰ است. معادلاتی که از عملیات حذفی گاس- جردن به دست می‌آید دارای خصوصیات ذیل هستند:

۱-معادله‌ی جدید تابع هدف (معادله صفر) شامل دو متغیر غیر پایه‌ای s_1 و x_2 است. به عبارت دیگر، ضریب متغیرهای پایه‌ای x_1, s_2 یا s_3 در معادله صفر، برابر با صفرند.

۲-هر کدام از متغیرهای پایه‌ای جدید x_1, s_2 یا s_3 دارای ضریب ۱+ در تنها یک معادله هستند.

۳-براساس ویژگی شماره ۲، اعداد سمت راست معادلات، نشان‌دهنده‌ی مقدار متغیرهای پایه‌ای x_1 ,s_2یاs_3و مقدار z هستند.

۲-۹-۲-۴- گام چهارم: سنجش بهینگی جواب پایه‌ای جدید

بعد از به دست آوردن هر جواب پایه‌ای جدید، بررسی این امر که آیا این جواب بهترین جواب بوده، بیشترین مقدار را برای تابع هدف z در بر خواهد داشت یا نه و اینکه آیا امکان افزایش مقدار z از ۳۰ وجود دارد، ضروری است. با افزایش مقدار x_2 در معادله‌ی صفر، امکان افزایش z وجود دارد (s_1 در تابع هدف غیرپایه‌ای باقی می‌ماند و مقدارش همچنان صفر است). بنابراین جواب پایه‌ای به دست آمده، بهینه نیست. وقتی جواب پایه‌ای بهینه است که ضرایب تمامی متغیرهای موجود در تابع هدف غیرمنفی باشند. بررسی ضرایب معادله‌ی تابع برای بررسی بهینه بودن جواب پایه‌ای، بعد از به دست آوردن هر جواب پایه‌ای را، سنجش بهینگی گویند. بعد از تکرار مجدد گامهای ۱ تا ۴، انتخاب متغیر ورودی (x_2) انتخاب متغیر خروجی (s_3) و انجام عملیات حذفی گاس- جردن، جواب پایه‌ای جدید(دومین جواب) به دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l} z + 3s_1 + 3s_3 \qquad = 42 \\ \quad s_1 \qquad + x_1 \qquad = 6 \\ \frac{2}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_3 + s_2 \qquad = 4 \\ -\frac{2}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_3 \qquad + x_2 = 4 \end{array}\right\} \qquad (۰)$$

(۱) دومین جواب پایه (تکرار دوم)

(۲)

(۳)

$$\rightarrow x_1 = 6, x_2 = 4, s_2 = 4, s_1 = 0, s_3 = 0, z = 42$$

نقطه B در شکل نشان دهنده جواب فوق است. از آنجا که ضرایب تمامی متغیرها در معادله‌ی صفر غیرمنفی‌اند، جواب فوق بهینه بوده، بیانگر بیشترین مقدار برای Z می باشد.

۲-۱۰- الگوریتم سیمپلکس

در قسمت قبل با عملیات جبری در روش سیمپلکس آشنا شدید. این عملیات در مجموعه‌ای از قوانین محاسباتی خلاصه و تحت عنوان الگوریتم سیمپلکس ارائه شده است که در اینجا با آن آشنا می‌شوید.

۲-۱۰-۱- گام اول: تبدیل مساله ی فرم استاندارد به فرم قابل ورود به جدول

مثال ۲-۸ را مجددا در نظر بگیرید، مساله ی ذکر شده در این مثال، بعد از اضافه کردن متغیرهای کمکی به سمت چپ نامعادله‌ها و تبدیل آنها به معادلات و انتقال متغیرهای تابع هدف به سمت چپ تساوی، به صورت زیر درخواهد آمد:

$$maxz - 5x_1 - 3x_2 \qquad (۰)$$

$$x_1 \qquad + s_1 \qquad = 6 \qquad (۱)$$

$$x_2 \qquad + s_2 \qquad = 8 \qquad (۲)$$

$$2x_1 + 3x_2 \qquad + s_3 = 24 \qquad (۳)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

مقادیر متغیرهای معادلات فوق در جدول ۲-۳ نمایش داده شده است. هر سطر از این جدول متناظر با یک معادله از مساله است. معادله صفر، نشان دهنده‌ی تابع هدف $z - 5x_1 - 3x_2 = 0$. معادلات ۱ تا ۳ بیانگر معادلات مربوط به قیدهای اول تا سوم است.

جدول ۲-۳ گام اول جدول (ناقص)

شماره سطر (معادله)	x x_1 x_2 s_1 s_2 s_3	اعداد ثابت سمت راست
۰	۱ -۵ -۳ ۰ ۰ ۰	۰
۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۶

۲	۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰	۸
۳	۰ ۲ ۳ ۰ ۰ ۱	۲۴

۲-۱۰-۲-گام دوم: تعیین یک جواب موجه ابتدایی برای جدول مرحله قبل

در صورتی که تمامی قیدهای مدل به صورت $\leq$ و همگی اعداد سمت راست غیرمنفی باشند، متغیرهای کمبود به عنوان جواب پایه‌ای ابتدایی قابل استفاده اند. در این مثال متغیرهای s_3 s_2 s_1 متغیرهای پایه‌ای جدول ابتدایی و $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ متغیرهای غیرپایه‌ای‌اند. به این ترتیب می‌توان جدول مرحله قبل را به صورت زیر تکمیل کرد:

جدول ۲-۴- گام دوم جدول (جواب ابتدایی)

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 s_1 s_2 s_3	اعداد سمت راست
Z	۰	۱ -۵ -۳ ۰ ۰ ۰	۰
s_1	۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۶
s_2	۲	۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰	۸
s_3	۳	۰ ۲ ۳ ۰ ۰ ۱	۲۴

جواب پایه‌ای موجه ابتدایی با استفاده از جدول فوق عبارت است از:

$$z = 0, s_1 = 6, s_2 = 8, s_3 = 24, x_1 = 0, x_2 = 0$$

برای خواندن جدول کافی است مقدار متغیرهای ستون اول (متغیرهای پایه‌ای) از ستون چهارم (ستون اعداد سمت راست) خوانده شود. مقدار سایر متغیرهایی که در مساله، موجود، ولی در ستون اول موجود نیست، صفر است. این متغیرها، متغیرهای غیرپایه‌ای هستند.

۲-۱۰-۳-گام سوم: انتخاب متغیر ورود:

به منظور تعیین متغیر ورودی، کافیست منفی ترین عدد (عدد منفی‌ای که بزرگترین قدر مطلق را دارد)، در سطر صفر انتخاب شود. متغیر مربوط به این عدد، متغیر ورودی است. در این مثال ۵- در سطر صفر، منفی ترین عدد موجود و متغیر مربوط به آن، متغیر x_1 است. اعداد موجود در ذیل ستون متغیر x_1 در سطرهای ۱، ۲ و ۳ ستون لولا را تشکیل می‌دهند. در صورتی که در سطر صفر، عدد منفی با بزرگترین قدرمطلق، بیشتر از یکی باشد (مثلاً در سطر صفر دو تا ۵- وجود داشته باشد) متغیر ورودی با انتخاب اختیاری یکی از دو متغیری که ضریب آن ۵- است، صورت می پذیرد.

۲-۱۰-۴-گام چهارم: انتخاب متغیر خروجی

برای هر سطر از جدول به جز سطر صفر، نسبت اعداد سمت راست به ضرایب مثبت متغیر ورودی (اعداد مثبت ستون لولا) را محاسبه کنید. این نسبت عبارت است از $\frac{b_i}{a_{ij}}$ (ضرایب منفی و صفر را در ستون لولا در نظر نگیرید). متغیر پایه‌ای مربوط به سطری که کمترین نسبت حاصله را دارد را، به عنوان متغیر خروجی در نظر بگیرید. سطر مربوط به متغیر خروجی، سطر لولا نامیده می‌شود. در مثال فوق برای سطر۱، نسبت حاصل $6 = \frac{6}{1}$ و برای سطر سوم $\frac{24}{2} = 12$ است. در سطر ۲ چون ضریب x_1 صفر است این نسبت محاسبه نمی‌شود. بنابراین کمترین مقدار نسبت حاصل ۶ و مربوط به سطر اول بوده، متغیر پایه‌ای مربوط به این سطر یعنی S_1 متغیر خروجی است.

۲-۱۰-۵-گام پنجم: به دست آوردن جواب پایه‌ای و حدول جدید برای جواب جدید

از آنجا که در مراحل ۳ و ۴، متغیر x_1 به عنوان متغیر ورودی و S_1 به عنوان متغیر خروجی انتخاب شد، متغیرهای پایه‌ای جدید S_3, S_2, x_1 خواهند بود و در اولین سطر جدول جدید x_1 جایگزین S_1می‌شود. در جدول جدید، هر متغیر پایه‌ای باید در محل تقاطع سطر و ستونی که مربوط به آن متغیر است ضریب ۱+ و در سایر سطرها ضریب صفر داشته باشد. بدین منظور از روش گاس- جردن استفاده می‌شود:

۱-جدول فعلی (۲-۵) را مدنظر قرار دهید سطر متغیر خروجی سطر لولا، ستون متغیر ورودی، ستون لولا و عدد محل تقاطع سطر و ستون لولا عدد لولاست.

جدول ۲-۵- گام پنجم جدول

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 S_1 S_2 S_3	اعداد سمت راست
Z	۰	۱ ۵- ۳- ۰ ۰ ۰	۰

s_1	۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۶
s_2	۲	۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰	۸
s_3	۳	۰ ۲ ۳ ۰ ۰ ۱	۲۴

۲- برای محاسبه‌ی اعداد سطر ۱ در جدول جدید (توجه داشته باشید که در جدول جدید اولین سطر محاسبه شده سطر جایگزین سطر لولای جدول فعلی است)، تمامی اعداد سطر ۱ جدول فعلی (جدول ۲-۵) بر عدد لولا تقسیم می‌شوند. از آنجا که عدد لولا در این جدول یک است، سطر ۱ جدید که سطر لولای جدید نامیده می‌شود، همان سطر ۱ جدول ۲-۵ خواهد بود.

۳- برای محاسبه اعداد سایر سطرهای جدول جدید (به جز سطر لولای جدید = سطر ۱ جدول ۲-۶) سایر اعداد ستون x_1 در جدول ۲-۵، به جز عدد لولا که باید همواره در جدول ۱ باشد، صفر می‌شوند، بدین منظور از فرمول زیر استفاده می‌شود:

(سطر لولای جدید) × (ضریب ستون لولا) – سطر قدیم = سطر جدید

منظور از ضریب ستون لولا در رابطه‌ی فوق، عددی است که در ستون لولا مقابل سطر مود نظر قرار می‌گیرد. برای تشریح مطلب، اعداد سطرهای جدید جدول ۲-۶ محاسبه می‌شود.

سطر صفر جدید:

[۱ -۵ -۳ ۰ ۰ ۰ ۰] (-۵) [۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۶]=[۰ ۰ -۳ ۵ ۰ ۰ ۳۰]

سطر ۲ جدید: چون ضریب ستون لولا صفر است، سطر جدید همان سطر قدیم خواهد بود:

سطر ۳ جدید:

[۰ ۲ ۳ ۰ ۰ ۱ ۲۴]- (۲) [۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۶]=[۰ ۰ ۳ -۲ ۰ ۱ ۱۲]

به این ترتیب جدول جدید به صورت زیر خواهد بود:

جدول ۲-۶ جدول جدید (اولین تکرار)

متغیرهای پایه	شماره سطر	x	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	اعداد سمت راست
Z	۰	۱	۰	-۳	۵	۰	۰	۳۰
s_1	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۶
s_2	۲	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۸
s_3	۳	۰	۰	۳	-۲	۰	۱	۱۲

بنابراین جواب جدید عبارت است از :

$$x_1 = 6, s_2 = 8, s_3 = 12, x_2 = 0, s_1 = 0, z = 0$$

۲-۱۰-۶-گام ششم: سنجش بهینگی

از آنجا که در سطر صفر جدول ۲-۶ عدد منفی وجود دارد(-۳) این جدول بهینه نیست و مراحل قبل مجدداً باید تکرار شود. در جدول زیر این تکرار صورت پذیرفته است. x_2 متغیر ورودی و s_3 متغیر خروجی است.

جدول ۲-۷ جواب بهینه (دومین تکرار)

متغیرهای پایه	شماره سطر	x	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	اعداد سمت راست
Z	۰	۱	۰	۰	۳	۰	۱	۴۲
x_1	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۶
s_2	۲	۰	۰	۰	$\frac{2}{3}$	۱	$-\frac{1}{3}$	۴
x_2	۳	۰	۰	۱	$-\frac{2}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$	۴

از آنجا که تمامی اعداد سطر صفر غیرمنفی‌اند، جدول نهایی است و جواب بهینه عبارت است از:

$$x_1 = 6, s_2 = 4, s_1 = 0, s_2 = 4, s_3 = 0, z = 42$$

۲-۱۱- روش حل مسائل فرمهای غیراستاندارد

فرمهای غیراستاندارد، مسائلی هستند که هر سه شرط زیر را داشته باشند:

۱-تابع هدف آنها حداقل باشد؛

۲-قیدها علامت $\geq$ یا = داشته باشند؛

۳-متغیرهای تصمیم مقادیر منفی نیز بپذیرند (آزاد در علامت باشند).

۲-۱۱-۱- مسائل با تابع هدف حداقل

از آنجا که حداقل کردن مقدار z (تابع هدف) به مفهوم حداکثر کردن $-z$ است می‌توان با ضرب کردن تابع هدف در ۱-، تابع هدف حداقل را حداکثر کرده، طبق روش ذکر شده‌ی قبلی به حل آن اقدام نمود.

۲-۱۱-۲- قیدهای دارای علامت $\geq$ یا =

به منظور حل مسائلی که دارای قیدهایی با علامت «$\geq$» یا «=» هستند، دو روش «M بزرگ» و «دو مرحله‌ای» معرفی می‌شود. این دو روش علیرغم تفاوتهای ظاهری، مبانی عملیاتی یکسانی را به کار می‌گیرند.

روش M بزرگ یا روش جریمه

۱-مسائل با قیدهای $\geq$

مثال ۲-مسأله زیر را در نظر بگیرید.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 3$$

$$-6x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

برای حل این مساله، قیدهای مدل را باید به معادله تبدیل کرد. بدین منظور به سمت چپ دو قید اول، متغیرهای کمبود s_1 و s_2 اضافه و از سمت چپ سومین قید، s_3 کسر شده است

$$z - 2x_1 - 3x_2 \qquad = 0 \qquad (٠)$$

$$x_1 \qquad + s_1 \qquad = 3 \qquad (١)$$

$$x_2 \qquad + s_2 \qquad = 3 \qquad (٢)$$

$$-6x_1 + 3x_2 \qquad - s_3 = 6 \quad (٣)$$

لذا ، جواب پایه‌ای ابتدایی عبارت خواهد بود از:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 3, s_2 = 3, s_3 = -6$$

از آنجا که $s_3 < 0$ است این جواب غیرموجه است. به منظور موجه کردن آن باید از متغیر غیر منفی جدیدی به نام متغیر مصنوعی که با *R* نشان داده می‌شود استفاده کرد. این متغیر باید به سمت چپ معادله سوم اضافه شود (توجه داشته باشید که متغیرهای مصنوعی فقط به سمت چپ قیدهای «$\geq$» یا «=» اضافه می‌شوند).

$$-6x_1 + 3x_2 - s_3 + R_1 = 6$$

با اضافه کردن یک متغیر مصنوعی به معادله ۳ قید اصلی سوم یعنی $-6x_1 + 3x_2 - s_3 = 6$ تغییر خواهد کرد و تنها در صورتی مساله به همان صورت اصلی باقی خواهد ماند که *R=0* شود:

در مسائلی با تابع هدف حداکثر، این امر با تخصیص ضریب *M*− به *R* در سمت راست و در تابع هدف حداقل با اختصاص ضریب *M* به متغیر مصنوعی (در سمت راست) صورت می‌پذیرد. *M* عددی است بسیار بزرگ که کم کردن آن از *R* در تابع هدف حداکثر (یا اضافه کردن در تابع هدف حداقل) منجر به صفر شدن (غیر پایه‌ای شدن) متغیر مصنوعی در جدول نهایی (جواب بهینه) خواهد شد. کم کردن یک *MR* از سمت راست تابع هدف حداکثر به ازای هر *R* موجود در قیدها به مفهوم جریمه ی متغیر مصنوعی *R* خواهد بود؛ زیرا هدف، حداکثر کردن معادله‌ی تابع هدف است و از آنجا که *M* عددی بسیار

بزرگ است، وجود $-MR$ چنانچه R در جواب نهایی مقداری غیر صفر داشته باشد، منجر به کاهش Z خواهد شد. از آنجا که سیمپلکس در جهت حداکثر کردن Z عمل می‌کند هیچگاه R را به عنوان یک متغیر پایه‌ای در جدول نهایی انتخاب نخواهد کرد و با صفر شدن R مجددا مساله به شکل اولیه ی خود بازخواهد گشت. در صورتی که تابع هدف، حداقل باشد، اضافه کردن MR در ازای هر R موجود در قیدها، به سمت راست تابع هدف صورت می‌پذیرد. چون در مثال فوق فقط یک R در قیدها وجود دارد و تابع هدف ماکزیمم است باید به سمت راست معادله‌ی صفر، MR- یا به سمت چپ آن MR اضافه کرده، مساله را به صورت زیر در آورد:

$$z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \qquad (۰)$$

$$x_1 + s_1 = 3 \qquad (۱)$$

$$x_2 + s_2 = 3 \qquad (۲)$$

$$-6x_1 + 3x_2 - s_3 + R = 6 \qquad (۳)$$

در این حال جدول ابتدایی سیمپلکس عبارت خواهد بود از:

جدول ۲-۸ جدول ابتدایی یکه نشده

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 s_1 s_2 s_3	اعداد سمت راست
Z	۰	۱ -۲ -۳ ۰ ۰ ۰ M	۰
s_1	۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰	۳
s_2	۲	۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۳
R	۳	۰ -۶ ۳ ۰ ۰ -۱ ۱	۶

از آنجا که متغیرهای پایه‌ای باید در سطر خودشان ۱ و در بقیه سطرها صفر باشند و این وضعیت برای متغیر اساسی R در سطر صفر برقرار نیست (ضریب R در سطر صفر M است)، باید M را حذف کرد. بدین منظور کافی است سطر سوم را در $-M$

ضر کرده، با سطر صفر جدول ۸-۳ جمع کنیم تا سطر صفر جدول جدید به دست آید (جدول ۹-۳) این عملیات را یکه کردن گویند و تکرار محسوب نمی‌شود.

جدول ۲-۹ جدول ابتدایی یکه شده

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 s_1 s_2 s_3	اعداد سمت راست
Z	۰	۱ (۱-۲+۶M) (-۳-۳M) ۰ ۰ M ۰	-۶M
s_1	۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰	۳
s_2	۲	۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۳
R	۳	۰ -۶ ۳ ۰ ۰ -۱ ۱	۶

جواب پایه‌ای ابتدایی جدول فوق عبارت است از:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 3, s_2 = 3, s_3 = 0, R = 6$$

به منظور پیدا کردن جواب نهایی باید گامهای ۳، ۴، ۵، ۶ را، مانند مسائل فرم استاندارد تکرار کرد. جدول زیر مراحل حل مساله را نشان می‌دهد.

جدول ۲-۱۰ حل مساله سیمپلکس برای قیدهای $\geq$

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 s_1 s_2 s_3 R	اعداد سمت راست
Z	۰	۱ -۸ ۰ ۰ ۰ -۱ (M+۱)	۶
s_1	۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰	۳
s_2	۲	۰ ۲ ۰ ۰ ۱ $\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$	۱
R	۳	۰ -۲ ۱ ۰ ۰ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	۲

Z	۰	۱ ۰ ۰ ۰ ۴ $\frac{1}{3}$ $(M-\frac{1}{3})$	۱۰
s_1	۱	۰ ۰ ۰ ۱ $-$ $\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$
x_1	۲	۰ ۱ ۰ ۰ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
x_2	۳	۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۳

به این ترتیب جواب بهینه عبارت است از : $x_1=\frac{1}{2}, x_2=3, s_1=\frac{5}{2}, s_2=0, s_3=0$ و *R=0* و مقدار *Z=10* خواهد بود.

اهمیت توجه به متغیر مصنوعی *R*: متغیر مصنوعی *R* ابزاری محاسباتی برای دستیابی به یک جواب موجه ابتدایی در مسائلی است که قیدهای $\geq$ موجب حذف مبدأ مختصات از منطقه موجه می‌گردند. این متغیر دارای مفهوم اقتصادی نبوده، فقط به عنوان تسهیل کننده‌ی محاسباتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. اضافه شدن متغیر مصنوعی به سمت چپ قیدهایی «بزرگتر یا مساوی» و تبدیل آن معادله به منزله کوچک کردن عدد سمت راست معادله است. توجه کنید که *R* متغیر غیرمنفی است و با کوچک شدن عدد سمت راست، عرض از مبدأ معادله کاهش یافته، معادله حدی مربوط به معادله به مبدأ مختصات نزدیک می‌شود. در صورتی که *R* مساوی عدد سمت راست معادله شود خط از مبدأ مختصات می‌گذرد و منطقه موجه بزرگ خواهد شد؛ به طوری که مبدأ مختصات می‌تواند به عنوان نقطه گوشه‌ی موجه ابتدایی مورد استفاده قرار گیرد. تذکر این نکته لازم است که چنانچه اعداد سمت راست قیدهای $\geq$ بزرگتر از صفر باشد، مبدأ مختصات از منطقه موجه حذف می‌شود و با اضافه شدن متغیر مصنوعی می‌توان منطقه موجه را تا مبدأ مختصات گسترش داد.

۲- مسائل با قیدهای =: از آنجا که قید تساوی نیازمند متغیر کمبود یا مازاد نیست و اکثرا دیگر متغیرهای تصمیم موجود در معادله، شرایط یکم متغیر پایه‌ای را ندارند، از متغیر مصنوعی *R* به عنوان متغیر پایه‌ای اینگونه قیدها استفاده می شود. متغیرهای مصنوعی در قیدهای «تساوی» مانند قیدهای «بزرگتر یا مساوی» به سمت چپ قید اضافه می‌شوند و به ازای هر *R* موجود در قیدها از سمت راست تابع هدف حداکثر *MR−* کسر می‌گردد. عملیات همانند حالت قبل تا یافتن جواب نهایی ادامه می‌یابد.

مثال ۲-۱۰:

$$maxz = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 = 3$$

$$-6x_1 + 3x_2 = 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

براساس دستورالعملهای قبل به قید اول s_1، به سمت چپ دو محدودیت دوم و سوم متغیرهای مصنوعی R_3, R_2، و به تابع هدف، $-MR_2$ و $-MR_3$ اضافه می‌شود. لذا:

$$Max\ z = 2x_1 + 3x_2 - MR_2 - MR_3$$

$$x_1 + s_1 = 3$$

$$x_2 + R_2 = 3$$

$$-6x_1 + 3x_2 + R_3 = 6$$

$$x_1, x_2, s_1, R_2, R_3 \geq 0$$

به این ترتیب جدول ابتدایی سیمپلکس، به صورت زیر خواهد بود:

جدول ۲-۱۱ جدول ابتدایی یکه نشده

متغیرهای پایه	شماره سطر	x	x_1	x_2	s_1	R_2	R_3	اعداد سمت راست
Z	۰	۱	-۲	-۳	۰	M	M	۰
s_1	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۳
R_2	۲	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۳

R_3	۳	۰ -۶ ۳ ۰ ۰ ۱	۶

چون ضریب متغیرهای پایه‌ای R_2 و R_3 در سطر صفر، M هستند باید نسبت به یکه کردن بردارهای R_2و R_3 (حذف Mها در تابع هدف ذیل ستون R_2و R_3)اقدام کرد. برای این کار براساس جدول فوق می‌توان هر کدام از دو سطر ۲ و ۳ را در $-M$ ضرب و با سطر صفر همین جدول جمع کرد تا سطر صفر جدول به صورت زیر به دست آید. سایر سطرها به همان صورت باقی می‌ماند.

جدول ۲-۱۲ جدول ابتدایی یکه شده

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 s_1 R_2 R_3	اعداد سمت راست
Z	۰	۱ (-۲+۶M) (-۳-۴M) ۰ ۰ ۰	-۹M
s_1	۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۳
R_2	۲	۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰	۳
R_3	۳	۰ -۶ ۳ ۰ ۰ ۱	۶

همان‌طور که مشاهده می‌کنید x_2 متغیر ورودی و R_3 متغیر خروجی است و بعد از دو تکرار جواب بهینه ی زیر به دست خواهد آمد:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3, s_1 = \frac{5}{2}, R_2 = 0, R_3 = 0, Z = 10$$

۲-۱۲-گامهای لازم برای حل مسائل به روش M بزرگ

۲-۱۲-۱-گام اول: به سمت چپ قیدهای «مساوی» یک متغیر مصنوعی بیفزایید و به سمت چپ قیدهای «بزرگتر یا مساوی» بعد از کم کردن یک متغیر کمکی، یک متغیر مصنوعی اضافه کنید.

۲-۱۲-۲-گام دوم: در صورتی که تابع هدف حداقل باشد با ضرب آن در ۱- آن را به حداکثر تبدیل و به ازای هر R موجود در قیدها از سمت راست تابع هدف یک MR کم کنید.

۲-۱۲-۳-گام سوم: مساله را وارد جدول سیمپلکس کنید و بردار متغیرهای اساسی R را یکه کنید (Mهای موجود در سطر صفر و در ذیل ستون متغیرهای مصنوعی جدول ابتدایی را صفر کنید).

۲-۱۲-۴-گام چهارم: مانند روش سیمپلکس فرم استاندارد، متغیر ورودی، متغیر خروجی و تکرارهای لازم را تا یافتن جواب نهایی ادامه دهید.

۲-۱۳-روش دو مرحله‌ای

از آنجا که روش M بزرگ در محاسبات کامپیوتری از ثبات کمتری برخوردار است، از روش دو مرحله‌ای برای حل مسائلی با قیدهای $\geq$ یا = استفاده می‌شود. هر دوی این روش ها، جواب های پایه‌ای موجه یکسانی به دست می‌دهند. همان گونه که از نام روش دو مرحله‌ای پیداست، مساله در دو مرحله حل می‌شود:

۱-پیدا کردن جواب موجه ابتدایی (با استفاده از تابع هدف مصنوعی).

۲-پیدا کردن جواب بهینه مساله (با استفاده از تابع هدف اصلی مساله).

شکل کلی روش حل دو مرحله‌ای به صورت زیر است:

در این روش مانند روش M بزرگ ابتدا با اضافه کردن متغیرهای مصنوعی به سمت چپ قیدهای= و کم کردن متغیرهای کمکی از سمت چپ قیدهای $\geq$ و افزودن متغیرهای مصنوعی، تغییرات لازم در قیدها انجام می‌گیرد. آنگاه در مرحله‌ی اول برای حل مساله از تابع هدفی که از مجموع متغیرهای مصنوعی موجود در قیدها تشکیل یافته است، به جای تابع هدف اصلی مساله استفاده می‌شود. بهترین مقدار برای آن صفر است (چرا؟) در پایان مرحله اول چنانچه مساله دارای جواب بهینه باشد مقدار W به صفر می‌رسد. با به صفر رسیدن W و حذف متغیرهای مصنوعیی از ستون متغیرهای پایه‌ای جدول سیمپلکس، جواب گوشه به دست می‌آید که نشانه‌ی رسیدن به منطقه‌ی موجه است. مرحله دوم، با حرکت در منطقه موجه برای یافتن بهترین جواب ادامه می‌یابد. در این مرحله از تابع هدف اصلی مساله و قیدهای پایانی مرحله اول استفاده می‌شود.

مثال۲-۱۱) مثال ۲-۹ را مجددا در نظر بگیرید. از آنجا که در هر سه قید این مساله فقط یک R وجود دارد، تابع هدف فقط شامل این متغیر است. تابع هدف اصلی این مساله در این مرحله موقتاً نادیده انگاشته می‌شود.

$$\min w = R_3$$

$$x_1 + s_1 = 3$$

$x_2 + s_2 = 3$

$-6x_1 + 3x_2 - s_2 + R_3 = 6$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, R_3 \geq 0$

از آنجا که تابع هدف حداقل است، ابتدا آن را به حداکثر تبدیل کرده، سپس متغیر را به سمت چپ تساوی منتقل و آن گاه وارد جدول می‌کنیم (جدول ۲-۱۳):

$$\min w = R_3 \rightarrow max - w = -R_3 \rightarrow max - w + R_3 = 0$$

در بخش اول جدول ۲-۱۳ چون ضریب R_3 در سطر صفر، یک است باید آن را به صفر تبدیل کرد (بردار R_3باید یکه شود). برای این کار سطر ۳ را در ۱- ضرب کرده، با سطر صفر جدول ابتدایی جمع می‌کنیم تا سطر صفر بخش دوم جدول به دست آید. بقیه عملیات طبق دستورالعملهای عادی سیمپلکس تا پایان مرحله اول ادامه می‌یابد.

جدول ۲-۱۳ مرحله اول

متغیرهای پایه	شماره سطر	x	x_1	x_2	s_1	s_2	S_3	R_3	اعداد سمت راست
Z	۰	-۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰
s_1	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۳
s_2	۲	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۳
R_3	۳	۰	-۶	۳	۰	۰	-۱	۱	۶
Z	۰	-۱	۶	-۳	۰	۰	۱	۰	-۶
s_1	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۳
s_2	۲	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۳
R_3	۳	۰	-۶	۳	۰	۰	-۱	۱	۶
Z	۰	-۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰

s_1	۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰	۳
s_2	۲	۰ ۲ ۰ ۰ ۱ $\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$	۱
x_2	۳	۰ -۲ ۱ ۰ ۰ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	۲

چون تمامی اعداد سطر صفر در آخرین بخش جدول ۲-۱۳ (بجز z) غیرمنفی‌اند، شرط بهینگی برای مرحله اول برقرار است. تذکر این نکته ضروری است که شرط بهینگی غیرمنفی شدن ضرایب متغیرهای تصمیم، کمکی و مصنوعی در سطر صفر جدول است و بنابراین منفی شدن ضریب w یا z در سطر صفر، دلیل غیربهینه بودن مساله نیست و تنها بیانگر حداقل بودن تابع هدف است. به عبارت دیگر اگر ضریب z در سطر صفر ۱ باشد، تابع هدف، حداکثر و اگر ۱- باشد حداقل است.

برای شروع مرحله دوم، قیدهای پایانی مرحله اول (یعنی سطرهای ۱، ۲ و ۳ بخش آخر جدول فوق) استخراج می‌شود تا قیدهای بخش اول جدول مرحله دوم (سطرهای ۱، ۲ و ۳) به دست آید. تابع هدف مصنوعی (سطر صفر) از بخش آخر جدول ۲-۱۳ حذف و تابع هدف اصلی مساله با انجام عملیات زیر وارد جدول جدید می‌شود:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max z - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

چون متغیر پایه‌ای x_2 در بخش اول جدول ۲-۱۴ یکه نیست، عمل یکه کردن در بخش دوم این جدول صورت می‌پذیرد. در جدول زیر ستون R حذف شده است. زیرا متغیر مصنوعی فقط به منظور دستیابی به جواب گوشه موجه مورد استفاده قرار می‌گیرد که در پایان مرحله اول به دست آمده است و چون عملیات مرحله دوم در منطقه ی موجه انجام می گیرد، نیازی به متغیر مصنوعی نیست و ستون آن حذف می شود.

جدول ۲-۱۴ تکرارهای مرحله دوم

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 s_1 s_2 S_3 R_3	اعداد سمت راست
Z	۰	۱ -۲ -۳ ۰ ۰ ۰	۰
s_1	۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۳
s_2	۲	۰ ۲ ۰ ۰ ۱ $-\frac{1}{3}$	۳
x_3	۳		۶

		۰ -۲ ۱ ۰ ۰ $\frac{1}{3}$	
Z	۰	۱ -۸ ۰ ۰ ۰ ۱	۶
s_1	۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۳
s_2	۲	۰ ۲ ۰ ۰ ۱ $-\frac{1}{3}$	۱
x_2	۳	۰ -۲ ۱ ۰ ۰ $\frac{1}{3}$	۲
Z	۰	۱ ۰ ۰ ۰ ۴ $\frac{1}{3}$	۱۰
s_1	۱	۰ ۰ ۰ ۱ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$
x_1	۲	۰ ۱ ۰ ۰ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
x_2	۳	۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰	۳

از آنجا که تمامی اعداد سطر صفر در بخش آخر جدول غیر منفی است، جدول بهینه و نهایی بوده، جواب بهینه عبارتست از :

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3, s_1 = \frac{5}{2}, s_2 = 0, s_3, R_3 = 0, z = 10$$

گامهای حل مسائل در روش دو مرحله‌ای:

۲-۱۳-۱-گام اول: به سمت چپ قیدها یا محدودیتهای «مساوی» متغیری مصنوعی بیفزایید و به سمت چپ قیدهای «بزرگتر یا مساوی» بعد از کم کردن یک متغیر کمکی، متغیری مصنوعی اضافه کنید.

۲-۱۳-۲-گام دوم: تابع هدفی با متغیرهای مصنوعی موجود در قیدها تشکیل می‌شود و با *min w* نشان داده می‌شود.

۲-۱۳-۳-گام سوم: تابع هدف گام دوم را به حداکثر تبدیل و به همراه قیدهای گام اول مانند مسائل سیمپلکس فرم استاندارد، وارد جدول سیمپلکس کنید.

۲-۱۳-۴-گام چهارم: بردار متغیرهای مصنوعی را در جدول ابتدایی یکه کنید (اعداد ۱ در سطر صفر، ذیل ستون متغیرهای مصنوعی R را با عملیات یکه کردن به صفر تبدیل کنید).

۲-۱۳-۵-گام پنجم: مانند روش سیمپلکس فرم استاندارد، متغیر ورودی، متغیر خروجی و تکرارهای لازم را تا یافتن جواب نهایی این مرحله ادامه دهید.

۲-۱۳-۶-گام ششم: سطر صفر جدول نهایی گام پنجم (تابع هدف مرحله ۱) را از جدول نهایی حذف و تابع هدف اصلی مساله را جایگزین آن کنید (در صورتی که تابع هدف اصلی مساله یعنی Z حداقل باشد آن را به حداکثر تبدیل نمایید).

۲-۱۳-۷-گام هفتم: بردار متغیرهای اساسی در جدول گام ششم را یکه کنید و تا یافتن جواب نهایی تکرارهای لازم را انجام دهید.

۲-۱۱-۳- مسائل با متغیرهای آزاد در علامت

همان‌طور که قبلاً گفته شد، در برنامه‌ریزی خطی، متغیرهای تصمیم معمولاً غیر منفی فرض می‌شوند؛ اما ممکن است در شرایط خاصی چنین فرضی در مورد آنها صدق نکند که در این صورت متغیرهای آزاد در علامت نامیده می‌شوند. در مدل‌سازی چنانچه متغیرهای تصمیم بیانگر مفاهیمی مانند «سطح تولید» یا «سطح موجودی کالا» باشند، متغیرهایی آزاد در علامت خواهند بود؛ زیرا سطح تولید یا موجودی می‌تواند افزایش یابد (مثبت شدن متغیر تصمیم)، کاهش یابد(منفی شدن متغیر تصمیم) یا بدون تغییر باقی بماند (صفر شدن متغیر تصمیم).

روش سیمپلکس فقط برای حل مسائلی قابل استفاده است که متغیرهای تصمیم آنها غیرمنفی باشند.

لذا، قبل از ورود متغیرهای آزاد در علامت به جدول سیمپلکس، باید آنها را به متغیرهای غیرمنفی تبدیل کرد. بدین منظور کافی است از فرمول تغییر متغیر زیر استفاده شود:

$$x_j = x'_j - x''_j$$

در رابطه‌ی فوق x_j آزاد در علامت و $x'_j \geq 0$ و $x''_j \geq 0$ است. با این تغییر در هر متغیر آزاد در علامت، کلیه‌ی متغیرهای موجود در مساله غیرمنفی خواهند شد.

مثال ۲-۱۲)

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 3$

$-6x_1 + 3x_2 \leq 6$

$x_1 > 0, x_2$ آزاد در علامت

از آنجا که x_2 آزاد در علامت است باید تغییر متغیر داد:

$x_2 = x'_2 - x''_2$

$x'_2, x''_2 \geq 0$

بنابراین:

$$\max z = 2x_1 + 3x'_2 - = 0 \qquad \max z - 2x_1 - 3x'_2 + 3x''_2 = 0$$

$$x_1 \leq 3 \qquad x_1 + s_1 = 3$$

$$x'_2 - x''_2 \leq 3 \quad \rightarrow \quad x'_2 - x''_2 + s_2 = 3$$

$$-6x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 \leq 6 \qquad -6x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 + s_3 = 6$$

$$x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x''_2 \geq 0 \qquad x_1, x'_2, x''_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید با انجام این تغییر، تمامی متغیرها غیرمنفی شده و مساله به روش سیمپلکس قابل حل می‌گردد. حل مساله ی مثال فوق، بعد از اضافه کردن متغیرهای کمبود و حل با روش سیمپلکس به شرح جدول زیر است:

جدول ۲-۱۵ حل مثال ۲-۱۲

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 s_1 s_2 S_3 R_3	اعداد سمت راست

Z	۰	۱ -۲ -۳ ۳ ۰ ۰ ۰	۰
s_1	۱	۰ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰	۳
s_2	۲	۰ ۰ ۱ -۱ ۰ ۱ ۰	۳
s_3	۳	۰ -۶ ۳ -۳ ۰ ۰ ۱	۶
Z	۰	۱ -۸ ۰ ۰ ۰ ۱	۶
s_1	۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۳
s_2	۲	۰ ۲ ۰ ۰ ۱ $-\frac{1}{3}$	۱
x'_2	۳	۰ -۲ -۱ ۰ ۰ $\frac{1}{3}$	۲
Z	۰	۱ ۰ ۰ ۰ ۴ $\frac{1}{3}$	۱۰
s_1	۱	۰ ۰ ۰ ۱ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$
x_1	۲	۰ ۱ ۰ ۰ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
x_2	۳	۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰	۳
Z	۰	۱ ۰ ۰ ۰ ۲ ۳ ۰	۱۵
s_3	۱	۰ ۰ ۰ ۰ ۶ -۳ ۱	۱۵
x_1	۲	۰ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰	۳
x_2	۳	۰ ۰ ۱ -۱ ۰ ۱ ۰	۳

جواب بهینه براساس جدول فوق عبارت است از:

$$x_1 = 3, x'_2 = 3, x''_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 15, z = 15$$

به عبارت دیگر:

$$x_1 = 3, x_2 = x'_2 - x''_2 \rightarrow x_2 = 3 - 0 = 3, s_1 0, s_2 = 0, s_3 = 15, z = 15$$

۲-۹-۳-حالات خاص هر مساله در روش سیمپلکس

در مراحل حل هر مساله ی برنامه‌ریزی خطی، با حالات متفاوتی مواجه می‌شویم که روش ترسیمی آنها بیان شده است. در اینجا نیز نشانه‌های شناخت حالات خاص در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس ارائه می‌شود.

۲-۹-۳-۱-منطقه‌ی موجه نامحدود

یک مساله در صورتی جواب بهینه ی نامحدود دارد که دارای منطقه‌ی موجه نامحدود باشد. وجود ستونی با اعداد غیرمثبت برای یک متغیر غیرپایه‌ای در یکی از جداول سیمپلکس، نشان‌دهنده‌ی نامحدود بودن منطقه‌ی موجه است. شایان ذکر است که اینگونه مسائل می‌توانند جواب بهینه محدود یا نامحدود، داشته باشند.

مثال۲-۱۳) منطقه موجه نامحدود جواب بهینه نامحدود.

$$\max z = 2x_1 + x_2 - MR_1$$

یا

$$\max z = 2x_1 + x_2 \qquad maxz - 2x_1 - x_2 + MR_1 = 0$$

$$5x_1 - \mathrm{x}_2 \geq 10 \qquad 5x_1 - \mathrm{x}_2 - \mathrm{s}_1 + \mathrm{R}_1 = 10$$

$$3x_1 - 2\mathrm{x}_2 \geq 9 \qquad 3x_1 - 2\mathrm{x}_2 + \mathrm{s}_2 + \mathrm{s}_2 = 9$$

$$\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \geq 0 \qquad \mathrm{x}_1, x_2, s_1, s_2, R_1 \geq 0$$

جدول ۲-۱۶ جدول مثال منطقه موجه نامحدود و جواب بهینه نامحدود

متغیرهای پایه	شماره سطر	$x \quad x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad R_1 \quad S_2$	اعداد سمت راست
Z	۰	۱ -۲ -۱ ۰ M ۰	۰
s_1	۱	۰ ۵ -۱ ۱ ۰	۱۰
s_2	۲	۰ ۳ -۲ ۰ ۰ ۱	۹

s_3			
Z	۰	۱ (-۲-۵M) (-۱+M) M ۰ ۰	-۱۰M
R_1	۱	۰ ۵ -۱ -۱ ۱ ۰	۱۰
s_2	۲	۰ ۳ -۲ ۰ ۰ ۱	۹
Z	۰	۱ ۰ $-\frac{7}{5}$ $-\frac{2}{5}$ $(\frac{2}{5}+M)$ ۰	۴
s_1	۱		۲
x_1	۲	۰ ۱ $-\frac{1}{5}$ $-\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ ۰	۳
x_2		۰ ۰ $-\frac{7}{5}$ $\frac{3}{5}$ $-\frac{3}{5}$ ۱	

اعداد منفی در بخش اول جدول بالا ذیل ستون x_2 نشانه نامحدود بودن منطقه موجه است، همین‌طور در بخش آخر جدول x_2 متغیری ورودی است ولی به علت منفی بودن اعداد ستون لولا امکان تعیین متغیر خروجی وجود ندارد و بنابراین مساله دارای جواب بهینه نامحدود است.

مثال ۲-۱۴) منطقه موجه نامحدود، جواب بهینه معین

$$\max z = x_1 - 4x_2 \qquad maxz = x_1 - 4x_2 - MR_1$$

یا

$$5x_1 - x_2 \geq 10 \qquad \max z - x_1 + 4x_2 + MR_1 = 0$$

$$3x_1 - 2x_2 \geq 9 \qquad 5x_1 - x_2 - s_1 + R_1 = 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad 3x_1 - 2x_2 + s_2 = 9$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, R_1 \geq 0$$

جدول ۲-۱۷ جدول مثال منطقه موجه نامحدود، جواب بهینه معین

متغیرهای پایه	شماره سطر	x	x_1	x_2	s_1	R_1	S_2	اعداد سمت راست
Z	۰	۱	-۱	۴	۰	M	۰	۰
R_1	۱	۰	۵	-۱	-۱	۱	۰	۱۰
s_2	۲	۰	۳	-۲	۰	۰	۱	۹
Z	۰	۱	(-۱-۵M)	(۴+M)	M	۰	۰	-۱۰M
R_1	۱	۰	۵	-۱	-۱	۱	۰	۱۰
s_2	۲	۰	۳	-۲	۰	۰	۱	۹
Z	۰	۱	۰	$\frac{19}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}+M$	۰	۲
x_1	۱	۰	۱	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	۰	۲
s_2	۲	۰	۰	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	۱	۳
Z	۰	۱	۰	$\frac{10}{3}$	۰	M	$\frac{1}{3}$	۳
x_1	۱	۰	۱	$\frac{2}{3}$	۰	۰	$\frac{1}{3}$	۳
s_1	۲	۰	۰	$-\frac{7}{3}$	۱	-۱	$\frac{5}{3}$	۵

وجود اعداد منفی ذیل ستون x_2 در سطرهای ۱ و ۲ در بخش اول جدول بالا بیانگر نامحدود بودن منطقه موجه است، اما همانطور که مشاهده می‌کنید عملیات در نهایت به جدولی بهینه، شامل جواب زیر ختم شده است:

$$x_1 = 3, x_2 = 0, s_1 = 5, s_2 = 0, R_1 = 0 z = 3$$

۲-۹-۳-۲- مسائل بدون جواب بهینه

این حالت در جدول سیمپلکس با حضور یک یا چند متغیر مصنوعی با مقداری غیرصفر، در جدول بهینه، قابل تشخیص است.

مثال ۲-۱۵) مساله فاقد منطقه موجه و بدون جواب بهینه

$\max z = 2x_1 + x_2 \qquad minz = 2x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$

یا

$5x_1 - x_2 \geq 10 \qquad \max -z = -2x_1 - x_2 - MR_1 - MR_2$

یا

$-x_1 + x_2 \geq 1 \qquad max - z + 2x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2 = 0$

یا

$x_1, x_2 \geq 0 \qquad x_1 - x_2 - s_1 + R_1 = 9$

$-x_1 + x_2 - s_2 + R_2 = 1$

جدول ۲-۱۸ جدول مثال فاقد منطقه موجه و بدون جواب بهینه

متغیرهای پایه	شماره سطر	$x \quad x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad R_1 \quad S_2$	اعداد سمت راست
Z	۰	-۱ ۲ ۱ ۰ ۰ M M	۰
R_1	۱	۰ ۱ -۱ -۱ ۱ ۰	۱
R_2	۲	۰ -۱ ۱ ۰ -۱ ۰ ۱	۱
Z	۰	-۱ ۲ ۱ M M ۰ ۰	-۲M
R_1	۱	۰ ۱ -۱ ۰ ۰ ۱ ۰	۱
R_2	۲	۰ -۱ ۰ ۰ -۱ ۰ ۱	۱

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، بخش آخر جدول، جدول بهینه است(زیرا تمامی اعداد سر صف در ذیل ستونهای متغیرهای تصمیم و متغیرهای کمکی و مصنوعی غیر منفی‌اند)، اما در اولین تکرار دو متغیر اساسی مصنوعی مقداری غیر صفر پیدا کرده‌اند و این امر نشان می‌دهد مساله، بدون منطقه موجه و بالطبع بدون جواب بهینه است. در مسائل دیگر ممکن است نه در تکرار اول، بلکه بعد از چندین تکرار به جدول بهینه‌ای با متغیرهای مصنوعی برسیم.

۲-۹-۳-۳- مسائل تباهیده

هر گاه نقطه‌ی گوشه از محل تقاطع بیش از دو خط تشکیل شده باشد، آن مساله، دارای حالت خاص تباهیده است. این حالت خاص در جداول سیمپلکس با مقدار صفر یک متغیر پایه‌ای (وجود عدد صفر در ستون سمت راست برای یک یا چند سطر به جز سطر تابع هدف) قابل تشخیص است. این حالت هنگامی رخ می‌دهد که شرط خروجی شدن برای بیش از یک متغیر وجود داشته باشد؛ یعنی کوچکترین عدد حاصل از تقسیم اعداد سمت راست بر ستون لولا، بیش از یکی باشد. به این ترتیب با ورود متغیر ورودی، همزمان مقدار دو یا چند متغیر پایه‌ای به صفر می‌رسد. از آنجا که در هر تکرار فقط یک متغیر خروجی وجود دارد (یک متغیر، غیرپایه‌ای می‌گردد)، مقدار برخی از متغیرهای پایه‌ای صفر می‌شود. آن متغیر پایه‌ای را که شرایط مشابهی برای خروجی شدن داشته است، اما به دلیل فوق هنوز جزء متغیرهای پایه‌ای است «متغیر تباهیده» می‌نامند. مقدار این متغیر در تکرار بعدی صفر خواهد شد. مادامی که متغیر پایه‌ای تباهیده صفر است، اگر در تکرارهای بعد به عنوان متغیر پایه‌ای خروجی انتخاب شود، مسلماً حداکثر افزایش متغیر پایه‌ای ورودی صفر بوده، مقدار تابع هدف تغییری نخواهد کرد.

اگر مقدار تابع هدف در تکرارها افزایش نیابد و همچنان ثابت بماند، ممکن است روش سیمپلکس به طور حلقه‌ای تکرار شود و به جای اینکه مقدار تابع هدف را به بهترین جواب برساند، یک سلسله جوابهای مکرری را به تناوب به دست دهد. این وضعیت به ندرت پیش می‌آید ولی در صورت بروز، می‌توان متغیر پایه‌ای خروجی دیگری را انتخاب و از آن رهایی یافت. در این وضعیت جواب جدول سیمپلکس یا تباهیده ی دائم است یا تباهیده ی موقت. این دو حالت در دو مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۲-۱۶: مساله و جدول سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید، وجود مقدار صفر برای متغیر پایه‌ای ***S3*** در بخش آخر جدول، نشان‌دهنده تباهیده بودن جواب بهینه است.

$$\max z = x_1 + 2x_2 \qquad minz - x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 \leq 4 \qquad\qquad x_1 + s_1 = 4$$

$2x_2 \leq 2 \qquad 2x_2 + s_2 = 6$

$x_1 + x_2 \leq 7 \qquad x_1 + x_2 + s_3 = 7$

$x_1, x_2 \geq 0 \qquad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

جدول ۲-۱۹ مثالی برای حالت خاص جواب بهینه تباهیده (تباهیده دائم)

متغیرهای پایه	شماره سطر	$x \quad x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad R_1 \quad S_2$	اعداد سمت راست
Z	۰	۱ -۱ -۲ ۰ ۰ ۰	۰
s_1	۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۴
s_2	۲	۰ ۲ ۰ ۱ ۰	۶
s_3	۳	۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱	۷
Z	۰	۱ -۱ ۰ ۰ ۱ ۰	۶
x_1	۱	۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۴
x_2	۲	۰ ۰ ۱ ۰ $\frac{1}{2}$ ۰	۳
s_3	۳	۰ ۰ ۰ -۱ -$\frac{1}{2}$ ۱	۴

$\max z = 2x_1 + x_2 \qquad minz - 2x_1 - x_2 = 0$

$4x_1 + 3x_2 \leq 12 \qquad 4x_1 + 3x_2 + s_1 = 12$

$4x_1 + x_2 \leq 8 \qquad 4x_1 + x_2 + s_2 = 8$

$4x_1 - x_2 \leq 8 \qquad 4x_1 - x_2 + s_3 = 8$

$x_1, x_2 \geq 0 \qquad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

حل ترسیمی و جدولی این مساله به صورت زیر است. شایان ذکر است که وجود صفر برای متغیر پایه‌ای s_3 در بخش دوم جدول بیانگر جواب تباهیده موقت است.

جدول ۲-۲۰ مثالی برای حالت خاص تباهیده موقت

متغیرهای پایه	شماره سطر	x	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	اعداد سمت راست
Z	۰	۱	-۲	-۱	۰	۰	۰	۰
s_1	۱	۰	۴	۳	۱	۰	۰	۱۲
s_2	۲	۰	۴	۱	۰	۱	۰	۸
s_3	۳	۰	۴	-۱	۰	۰	۱	۸
Z	۰	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۴
x_1	۱	۰	۰	۲	۱	-۱	۰	۴
x_1	۲	۰	۱	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	۲
s_3	۳	۰	۰	-۲	۰	-۱	۱	۰
Z	۰	۱	۰	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	۰	۵
x_2	۱	۰	۰	۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۲
x_1	۲	۰	۱	۰	$-\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	۰	$\frac{3}{2}$
s_3	۳	۰	۰	۰	۱	-۲	۱	۴

۲-۹-۳-۴- جواب بهینه چندگانه

همان‌طور که بیان شد، مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌توانند بیش از یک جواب بهینه داشته باشند. این حالت وقتی رخ می‌دهد که تابع هدف با یکی از قیدها موازی باشد. تشخیص این وضعیت در جدول نهایی به سادگی امکانپذیر است. صفر شدن ضریب

یک متغیر غیرپایه‌ای در سطر صفر جدول بهینه، نشانه‌ی چندگانه بودن جواب بهینه است. در این وضعیت هرگاه متغیری که مقدار آن در سطر صفر، صفر گردیده است، به عنوان ورودی انتخاب شود جواب گوشه‌ی بهینه‌ی دیگری به دست خواهد آمد. زیرا مقدار این متغیر در سطر صفر، به معنی عدم کاهش یا افزایش در مقدار تابع هدف است. به عبارت دیگر، این متغیر موجب صفر واحد تغییر در مقدار تابع هدف (z) می‌شود.

از آنجا که در عملیات سیمپلکس فقط نقاط گوشه‌ی موجه جستجو می‌شود، با ورود متغیر واجد شرایط (متغیری غیر پایه‌ای که در سطر صفر، مقدار صفر دارد)، می‌توان در هر تکرار یکی از نقاط گوشه‌ی بهینه را به دست آورد و با تکرار این کار، تمام نقاط گوشه را پیدا کرد.

مثال ۲-۱۷) مساله زیر را در نظر بگیرید.

$$\max z = 10x_1 + 20x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نمایش ترسیمی این مساله به صورت زیر است:

بخشهای دوم و سوم جدول ۲-۲۱ در مثال زیر جوابهای گوشه‌ی بهینه را ارائه می‌کنند.

با ورود s_2 به بخش سوم جدول، مجدداً همان جواب بهینه‌ی قبلی (بخش دوم و چهارم) به دست می آید و ورود یک متغیر واجد شرایط دیگر، جواب گوشه بهینه جدیدی به دست نخواهد داد.

جدول ۲-۲۱ جواب بهینه چندگانه

تناظر جدول با شکل	اعداد سمت راست	x x_1 x_2 s_1 s_2	شماره سطر	متغیرهای پایه
بخش اول (نقطه‌ی	۰	۱ -۱۰ -۲۰ ۰ ۰	۰	Z

s_1 s_2	۱ ۲	۰ ۲ ۴ ۱ ۰ ۰ ۲ ۲ ۰ ۱	۱۲ ۸	(o
Z x_2 s_2	۰ ۱ ۲	۱ ۰ ۰ ۵ ۰ ۰ $\frac{1}{2}$ ۱ $\frac{1}{2}$ ۰ ۰ ۱ ۰ $-\frac{1}{2}$ ۱	۶۰ ۳ ۲	بخش دوم (نقطه *A* جدول بهینه)
Z x_2 x_1	۰ ۱ ۲	۱ ۰ ۰ ۵ ۰ ۰ ۰ ۱ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{4}$ ۰ ۱ ۰ $-\frac{1}{2}$ ۱	۶۰ ۲ ۲	بخش سوم (نقطه‌ی *B*، بهینه)
Z x_2 s_2	۰ ۱ ۲	۱ ۰ ۰ ۵ ۰ ۰ $\frac{1}{2}$ ۱ $-\frac{1}{4}$ ۰ ۰ ۱ ۰ $-\frac{1}{2}$ ۱	۶۰ ۳ ۲	بخش چهارم(نقطه‌ی *A*)

در مسائل دو متغیره، تمامی جوابهای بهینه را می توان با استفاده از فرمول زیر به دست آورد:

$$x_1 = \lambda x_1^{<1>} + (1-\lambda)x_1^{<2>}$$

$$x_2 = \lambda x_2^{<1>} + (1-\lambda)x_1^{<2>}$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

در مثال فوق با داشتن دو نقطه‌ی بهینه‌ی *B(2,2), A(0,3)* خواهیم داشت:

$$x_1 = \lambda(0) + (1-\lambda)(2) = 2 - 2\lambda$$

$$x_2 = 3\lambda + (1-\lambda)2 = 2 + \lambda$$

$x_1^{<2>}$ و $x_1^{<1>}$ بدین معناست که x_1 مربوط به اولین نقطه (*A*) و دومین نقطه (*B*) جواب بهینه است. در ازای $\lambda = 0$ نقطه *B* و در ازای $\lambda = 1$ نقطه‌ی *A* به دست می‌آید و در ازای بی نهایت مقدار دیگر برای λ که بین صفر تا یک باشد، بی نهایت جواب بهینه‌ی غیرگوشه‌ی دیگر به دست می آید. مثلاً چنانچه $\lambda = \frac{1}{2}$ باشد $x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{2}, Z^* = 60$ خواهد شد.

فرمول فوق در مسائل *n* متغیره به صورت زیر در می‌آید (*m* تعداد متغیر است).

$$\bar{x}_m = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_m^{<i>} \text{ و } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \text{ و } 0 \le \lambda_i \le 1$$

مثال ۲-۱۸)

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 10$$

$$x_1 \le 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

حل مساله و تمامی نقاط گوشه‌ی آن به شرح جدول زیر است:

جدول ۲-۲۲ تکرارهای سیمپلکس برای مساله ای با جوابهای بهینه چندگانه

جواب بهینه	اعداد سمت راست	Z x_1 x_2 x_3 s_1 s_2 s_3	شماره سطر	متغیرهای پایه
	۰	۱ -۱ -۲ -۳ ۰ ۰ ۰	۰	Z
	۱۰	۰ ۱ ۲ ۳ ۱ ۰ ۰	۱	s_1
	۵	۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰	۲	s_2
	۱	۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱	۳	

				s_3
اولین جواب بهینه ($i=1$) $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = \frac{10}{3}$	۱۰ $\frac{10}{3}$ ۵ ۱	۱ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ ۱ $\frac{1}{3}$ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱	۰ ۱ ۲ ۳	Z s_1 s_2 s_3
دومین جواب بهینه ($i=2$) $x_1 = 0$ $x_2 = 5$ $x_3 = 0$	۱۰ ۰ ۵ ۱	۱ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ $-\frac{1}{3}$ ۰ ۱ $\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱	۰ ۱ ۲ ۳	Z s_1 s_2 s_3
سومین جواب بهینه($i=3$) $x_1 = 1$ $x_2 = 4$ $x_3 = \frac{1}{3}$	۱۰ $\frac{1}{3}$ ۴ ۱	۱ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ $\frac{1}{3}$ $-\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱ -۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱	۰ ۱ ۲ ۳	Z s_1 s_2 s_3
چهارمین جواب بهینه ($i=4$) $x_1 = 1$ $x_2 = 0$ $x_3 = 3$	۱۰ ۳ ۴ ۱	۱ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ $\frac{2}{3}$ ۱ $\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۱ -۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱	۰ ۱ ۲ ۳	Z x_3 s_2 x_1

جواب کلی مساله بدین صورت است:

$$\bar{x}_i = \lambda_1 x_m^{<1>} + \lambda_2 x_m^{<2>} + \lambda_3 x_m^{<3>} + \lambda_4 x_m^{<4>}$$

$$\bar{x}_1 = \lambda_3 + \lambda_4$$

$$\bar{x}_2 = 5\lambda_2 + 4\lambda_3$$

$$\bar{x}_3 = \frac{10}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_3 + 3\lambda_4$$

$$\bar{s}_1 = 0$$

$$\bar{s}_2 = 5\lambda_1 + 4\lambda_4$$

$$\bar{s}_3 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$$

$$0 \le \lambda_i \le 1 \qquad i = 1,2,3,4$$

۲-۱۴- مسائل حل شده

۱-مساله زیر را به روش *M* بزرگ حل کنید.

$$\min z = 14x_1 + 15x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 = 30$$

$$x_1 + 4x_2 \ge 20$$

$$3x_1 + x_2 \ge 15$$

$$x_1 \le 10$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

مساله ی بالا به علت حداقل بودن تابع هدف و اینکه سه قید اول علامت$\le$ ندارند، غیراستاندارد است. برای حل مساله، تابع هدف را در ۱- ضرب کرده به قید اول که به صورت = است متغیر مصنوعی *R1* را می‌افزاییم. به قیدهای دوم و سوم نیز بعد از

کم کردن دو متغیر s_2و s_3 دو متغیر مصنوعی R_2و R_3 اضافه می‌کنیم. همچنین به قید آخر متغیر s_4 را می‌افزاییم. از آنجا که مساله دارای سه متغیر مصنوعی است، این سه متغیر با ضرب $-M$ از سمت راست تابع هدف تبدیل به حداکثر شده، اضافه می‌گردد:

$$Max - z = -14x_1 - 15x_2 - MR_1 - MR_2 - MR_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + \quad + R_1 \qquad = 30$$

$$x_1 + 4x_2 - s_2 \quad + R_1 \qquad = 20$$

$$3x_1 + x_2 - s_3 \qquad + R_3 \;= 15$$

$$x_1 \qquad + s_4 \qquad = 10$$

$$x_1, x_2, s_2, s_3, s_4, R_1, R_2, R_3 \geq 0$$

سپس مقادیر تابع هدف را به سمت چپ تساوی منتقل کرده، مساله را وارد جدول می‌کنیم:

جدول ۲-۲۳ جدول ابتدایی یکه نشده

متغیرهای پایه	شماره سطر	z	x_1	x_2	s_2	s_3	s_4	R_1	R_2	R_3	اعداد سمت راست
Z	۰	-۱	۱۴	۱۵	۰	۰	۰	M	M	M	۰
R_1	۱	۰	۲	۳	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۳۰
R_2	۲	۰	۱	۴	-۱	۰	۰	۰	۱	۰	۲۰
R_3	۳	۰	۳	۱	۰	-۱	۰	۰	۰	۱	۱۵
s_4	۴	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱۰

دقت داشته باشید که متغیرهای پایه‌ای R_1 ، R_2 و R_3 بردار واحدی را تشکیل نمی‌دهند، بنابراین باید ضرایب Mرا در ذیل ستون این سه متغیر در سطر صفر، به صفر تبدیل کرد (بردار این سه متغیر را یکه می‌کنیم).

جدول ۲-۲۴ جدول ابتدایی یکه شده (تکرار صفر)

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 s_2 s_3 s_4 R_1 R_2 R_3	اعداد سمت راست
Z	۰	−۱ (۱۴-۶M) (۱۵-۸M) M M ۰ ۰ ۰ ۰	-۶۵M
R_1	۱	۰ ۲ ۳ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰	۳۰
R_2	۲	۰ ۱ ۴ −۱ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰	۲۰
R_3	۳	۰ ۳ ۱ ۰ −۱ ۰ ۰ ۰ ۱	۱۵
s_4	۴	۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰	۱۰

متغیر x_2 ورودی و متغیر R_2 خروجی است.

جدول ۲-۲۵ تکرار ۱

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 s_2 s_3 s_4 R_1 R_2 R_3	اعداد سمت راست
Z	۰	−۱ $(\frac{41}{4}$-۴M) ۰ $(\frac{15}{4}$-M) M ۰ ۰ $(-\frac{15}{4}$+۲M) ۰	-۷۵-۲۵M
R_1	۱	۰ $\frac{5}{4}$ ۰ $\frac{3}{4}$ ۰ ۰ ۱ $-\frac{3}{4}$ ۰	۱۵
x_2	۲	۰ ۱ $-\frac{1}{4}$ ۰ ۰ ۰ $\frac{1}{4}$ ۰	۵
R_3	۳	۰ $\frac{11}{4}$ ۰ $\frac{1}{4}$ −۱ ۰ ۰ $-\frac{1}{4}$ ۱	۱۰
s_4	۴	۰ ۱ ۰ ۰ ۰ ۱ ۰ ۰ ۰	۱۰

چون ضریب x_1 همچنان منفی است، جدول فوق غیربهینه بوده، x_1 و R_3 به ترتیب متغیر ورودی و متغیر خروجی اند.

جدول ۲-۲۶ تکرار ۲

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 s_2 s_3 s_4 R_1 R_2 R_3	اعداد سمت راست
Z	۰	۰ ۰ (۱/۶۴M-۲/۸۲) ۳/۷۲۷-۱/۴۵M	۱۱۲/۳-۱۰/۵M

R_1	۱	-۱ ۰ ۰ (-۰/۶۴M+۲/۸۲)(۰/۴۵M+۳/۷۳)	۱۰/۴۵۵
x_2	۲	۰ ۰ ۰ ۰/۶۳۶ ۰/۴۵۵ ۰ ۱ -۰/۶۲۶ -۰/۴۵۵	۴/۰۹
R_3	۳	۰ ۰ ۱ -۰/۲۷۳ ۰/۰۹۱ ۰ ۰ ۰/۲۷۳ -۰/۰۹۱	۳/۶۴
s_4	۴	۰ ۱ ۰ ۰/۰۹۱ -۰/۳۶۴ ۰ ۰ -۰/۰۹۱ ۰/۳۶۴	۶/۳۶
		۰ ۰ ۰ -۰/۹۱ ۰/۳۶۴ ۱ ۰ ۰/۹۱ -۰/۳۶۴	

جدول بالا هنوز بهینه نیست چون ضریب s_2 و s_3 در سطر صفر همچنان منفی است. بنابراین s_2 را که ضریب منفی‌تری دارد به عنوان متغیر ورودی انتخاب کرده، تکرار دیگری انجام می دهیم.

جدول ۲-۲۷ تکرار نهایی

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 s_2 s_3 s_4 R_1 R_2 R_3	اعداد سمت راست
Z	۰	-۱ ۰ ۰ ۰ ۱/۷۱ ۰ M-۴/۴۳ M M-۱/۷۱	-۱۵۸/۶
R_1	۱	۰ ۰ ۰ ۱ ۰/۷۱۵ ۰ ۱/۵۷ -۱ -۰/۷۱۴	۱۶/۴۲۹
x_2	۲	۰ ۰ ۱ ۰ ۰/۲۸۶ ۰ ۰/۴۲۸ ۰ -۰/۲۸۶	۸/۵۷۱
R_3	۳	۰ ۱ ۰ ۰ -۰/۴۲۹ ۰ -۰/۱۴۳ ۰ ۰/۴۲۹	۲/۱۴۳
s_4	۴	۰ ۰ ۰ ۰ ۰/۴۲۹ ۱ ۰/۱۴۳ ۰ -۰/۴۲۹	۷/۸۶

از آنجا که تمامی اعداد سطر صفر غیرمنفی‌اند، جدول بهینه است و جواب بهینه عبارت است از:

$$x_1^* = 2/143 \qquad s_3^* = 0 \qquad R_2^* = 0$$

$$x_2^* = 8/571 \qquad s_4^* = 0 \qquad R_3^* = 0$$

$$s_2^* = 16/429 \qquad R_1^* = 0 \qquad -Z* = -158/6 : z* = 158/6$$

۲-مساله زیر را به روش دو مرحله‌ای حل کنید.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

St

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

به قید اول یک متغیر مصنوعی اضافه می‌کنیم، از قید دوم یک متغیر کمکی کم و به آن یک متغیر مصنوعی اضافه می‌کنیم.

بدین ترتیب قیدهای مساله به صورت زیر در می آید:

$$x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 7$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 - s_2 + R_2 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, s_2, R_1, R_2 \geq 0$$

از آنجا که مساله دو متغیر مصنوعی دارد، تابع هدف مرحله اول این مساله و قیدهای آن چنین خواهد بود:

$$\max z = R_1 + R_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 7$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 - s_2 + R_2 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, s_2, R_1, R_2 \geq 0$$

برای وارد کردن مساله به جدول، ابتدا تابع هدف را حداکثر کرده، سپس به سمت چپ تساوی منتقل می‌کنیم:

$$max - w = -R_1 - R_2 \rightarrow \max -w + R_1 + R_2 = 0$$

جدول ۲-۲۸ جدول ابتدایی یکه نشده

متغیرهای پایه	شماره سطر	$w \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad s_2 \quad R_1 \quad R_2$	اعداد سمت راست
w	۰	-۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱	۰
R_1	۱	۰ ۱ ۱ ۱ ۰ ۱ ۰	۷
R_2	۲	۰ ۲ -۵ ۱ -۱ ۰ ۱	۱۰

ضرایب R_1وR_2 را در سطر صفر جدول باید حذف کرد، جدول یکه شده به صورت زیر است:

جدول ۲-۲۹ جدول ابتدایی یکه شده

متغیرهای پایه	شماره سطر	$w \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad s_2 \quad R_1 \quad R_2$	اعداد سمت راست
w	۰	-۱ -۳ ۴ -۲ ۱ ۰ ۰	-۱۷
R_1	۱	۰ ۱ ۱ ۱ ۰ ۱ ۰	۷
R_2	۲	۰ ۲ -۵ ۱ -۱ ۰ ۱	۱۰

جداول بعد، تکرارهای لازم تا رسیدن به پایان مرحله ی اول است. نشانه ی رسیدن به پایان مرحله ی اول صفر شدن مقدار w و غیرپایه‌ای شدن R_2 , R_1 است.

جدول ۲-۳۰ تکرارهای ۱ و ۲ مرحله اول

متغیرهای پایه	شماره سطر	$w \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad s_2 \quad R_1 \quad R_2$	اعداد سمت راست
w	۰	-۱ ۰ $-\frac{7}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ ۰ $\frac{3}{2}$	-۲
R_1	۱	۰ ۰ $\frac{7}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ ۱ $-\frac{1}{2}$	۲
x_1	۲	۰ ۱ $-\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ ۰ $\frac{1}{2}$	۵
w	۰	-۱ ۰ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱	۰

x_2	۱	۰ ۰ ۱ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ $-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
x_1	۲	۰ ۱ ۰ $\frac{6}{7}$ $-\frac{1}{7}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{1}{7}$	$\frac{45}{7}$

در مرحله دوم، تابع هدف اصلی مساله که متغیرهای آن به سمت چپ تساوی منتقل شده، همراه با قیدهای پایانی مرحله اول وارد جدول می‌شود. بعد از یکه کردن بردار متغیرهای x_1 و x_2 غیرمنفی شدن اعداد سطر صفر، جداول بهینه خواهد شد.

جدول ۲-۳۱ تکرارهای مرحله دوم

متغیرهای پایه	شماره سطر	x x_1 x_2 x_3 s_2	اعداد سمت راست
w	۰	۱ -۲ -۳ ۵ ۰	۰
R_1	۱	۰ ۰ ۱ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
x_1	۲	۰ ۱ ۰ $\frac{6}{7}$ $-\frac{1}{7}$	$\frac{45}{7}$
w	۰	۱ ۰ ۰ $\frac{50}{7}$ $\frac{1}{7}$	$\frac{102}{7}$
x_2	۱	۰ ۰ ۱ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
x_1	۲	۰ ۱ ۰ $\frac{6}{7}$ $-\frac{1}{7}$	$\frac{45}{7}$

$$x_1^* = \frac{45}{7} \qquad x_2^* = \frac{4}{7} \qquad s_2^* = 0 \qquad z^* = \frac{102}{7}$$

فصل سوم: برنامه ریزی عدد صحیح و روش های حل کلاسیک آن

۳-۱- برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح (ILP): Integer Linear Programming

برنامه ریزی عدد صحیح نوع خاصی از برنامه ریزی خطی است که در آن یک یا چند متغیر تصمیم گیری باید عدد صحیح باشند . در بسیاری از مسائل واقعی مقادیر اعشاری قابل قبول نیستند و چنانچه مقادیری غیر از عدد صحیح به متغیرهای تصمیم داده شود، بی معنا خواهد بود . به عنوان نمونه، به متغیرهائی نظیر تعداد نفرات و تعداد دستگاه ها، باید مقادیر عدد صحیح اختصاص داده شود.

مدلهای خطی برنامه ریزی عدد صحیح به سه گروه زیر طبقه بندی می شوند:

۳-۱-۱- برنامه ریزی عدد صحیح محض : (*Pure Inetger Programming*)

مدلی است که تمامی متغیرهای آن باید عدد صحیح باشند . این مدل با صرف نظر از قید اضافی صحیح بودن متغیرها ، به یک مدل برنامه ریزی خطی تبدیل می گردد.

۳-۱-۲- برنامه ریزی عدد صحیح مختلط :(*Mixed Integer Programming*)

مدلی که شرط عدد صحیح بودن، تنها در مورد تعدادی از متغیرها ضرورت داشته باشد ، مدل برنامه ریزی عدد صحیح مختلط نامیده می شود.

۳-۱-۳- برنامه ریزی عدد صحیح صفر و یک: (*Zero-one or binary Integer Programming*)

مدل هایی که متغیرهای عدد صحیح، محدود به داشتن مقادیر صفرو یک هستند، این مدل را دودویی نیز می نامند .

مثال: پنج پروژه در افق دید سه ساله مورد بررسی قرار گرفته‌اند و جدول زیر نشان دهنده بازگشت سرمایه (سرمایه‌گذاری) مورد انتظار از هر پروژه و همچنین هزینه‌های سالانه هر کدام از پروژه‌هاست. مدل مربوط به حداکثرسازی بازگشت سرمایه را مشخص نمائید.

بازگشت سرمایه (میلیون دلار)	هزینه‌های سالانه بر حسب میلیون دلار/ سال			شماره پروژه
	۳	۲	۱	
۲۰	۸	۱	۵	۱
۴۰	۱۰	۷	۴	۲
۲۰	۲	۹	۳	۳
۱۵	۱	۴	۷	۴
۳۰	۱۰	۶	۸	۵
	۲۵	۲۵	۲۵	سرمایه در دسترس (میلیون دلار)

حل: این مساله به صورت تصمیم‌گیری بلی یا خیر نسبت به انتخاب هر پروژه است، بنابراین متغیر تصمیم باینری x_i را می‌توانیم به این صورت تعریف نمائیم:

x_i ۱ اگر پروژه i انتخاب شود

• اگر پروژه i انتخاب نشود

در این صورت مدل ILP بصورت زیر خواهد بود:

$$Max\ Z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

$$s.t \quad \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25 \\ 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25 \end{cases}$$

$$x_1\ ,x_2\ ,x_3\ ,x_4\ ,x_5 = (0\ ,1)$$

جواب بهینه مساله بصورت $x_5 = 0$ و $x_1\ ,x_2\ ,x_3\ ,x_4\ = 1$ خواهد بود.

در حالیکه محاسبه مقادیر این مساله بدون فرض عدد صحیح بودن x_i ها (توسط نرم افزار) اعداد $x_1\ = 0.5789$ ، $x_5\ = 0.7368$ ، $x_2\ ,x_3\ ,x_4\ = 1$ و $Z\ = 108.68$ را به ما می‌دهد که این جواب برای ما بی‌معنی است، زیرا اگر بخواهیم جواب‌های $x_1\ ,x_5$ را گرد نمائیم حاصل $x_1\ ,x_2\ ,x_3\ ,x_4\ ,x_5 = 1$ خواهد بود، که چنین جوابی موجه نیست. به عنوان مثال با چنین فرضی در محدودیت سوم داریم:

$$8(1) + 10(1) + 2(1) + (1)(1) + 10(1) = 31 \leq 25$$

که این عبارت نادرست است، یعنی محدودیت برقرار نیست و در فضای غیرموجه قرار می‌گیریم. این مثال نشان می‌دهد که در حالت کلی مدل‌های ILP را نمی‌توانیم بدون فرض عدد صحیح بودن متغیرها حل نموده و جواب را گرد کرده تا عدد صحیح بدست آید.

۳-۲- الگوریتم‌های ILP:

استراتژی الگوریتم‌های حل مسائل ILP شامل سه گام اساسی زیر است:

۳-۲-۱- گام اول: مدل ILP را از قید صحیح بودن متغیرهای صحیح آزاد می‌کنیم و برای متغیرهای باینری (صفر و یک) مانند y بجای قید $y_i \in \{0,1\}$ ، قید $y_i \in [0,1]$ را قرار می‌دهیم. نتیجه این آزاد سازی، تبدیل مساله ILP به مساله LP معمولی است.

۳-۲-۲-گام دوم: مدل LP حاصل شده از گام اول را حل می‌کنیم (با روش‌های معمولی).

۳-۲-۳- گام سوم: با شروع از نقطه ی بهینه ی مساله، پیوسته بصورت مرحله‌ای محدودیت‌هایی را به مدل اضافه می‌کنیم تا فضای موجه مساله به سمت اصلاح شدن رفته و محدود شود، تا جواب‌های نامطلوب از آن حذف گردد. برای افزودن محدودیت‌های گام سوم دو روش کلی وجود دارد:

۳-۲-۳-۱- روش شاخه و کران (انشعاب و تحدید): (B & B یا Branch and Bound)

۳-۲-۳-۲- روش صفحات برشی: (cutting plane)

۱. الگوریتم شاخه و کران: با یک مثال عددی برای بیان جزئیات الگوریتم شروع می‌کنیم و در نهایت جمع‌بندی این مثال را در حالت کلی بیان خواهیم نمود.

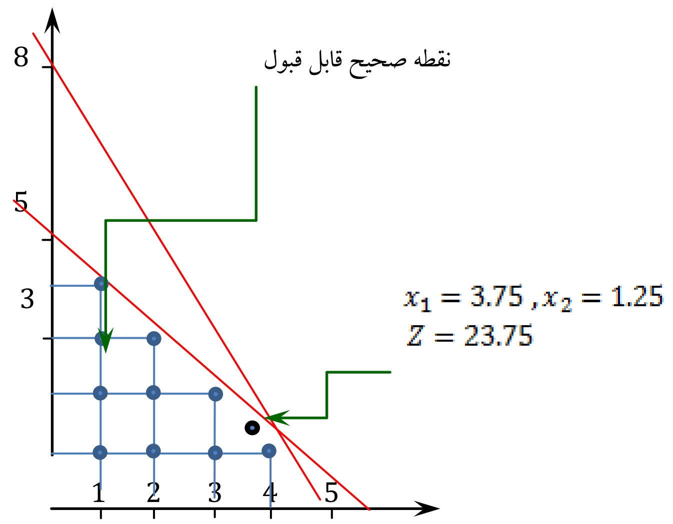
مثال:

$$Max\ Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$s.t$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45 \end{cases}$$

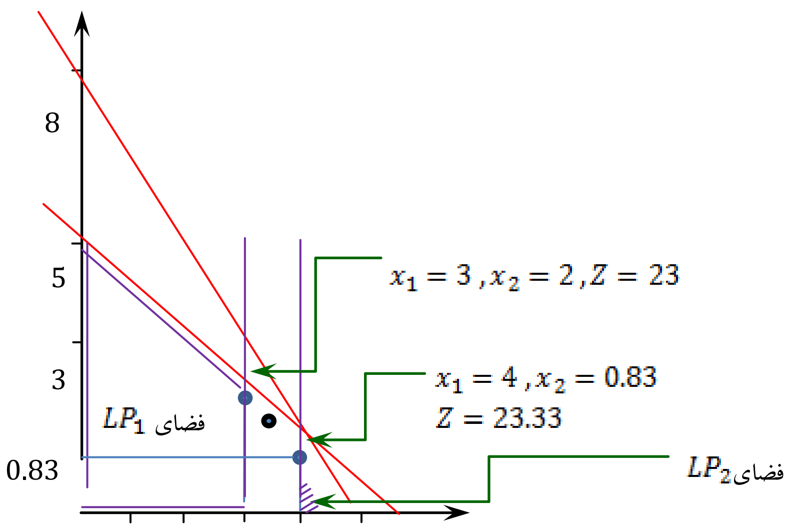
$$x_1 , x_2 \ge 0$$



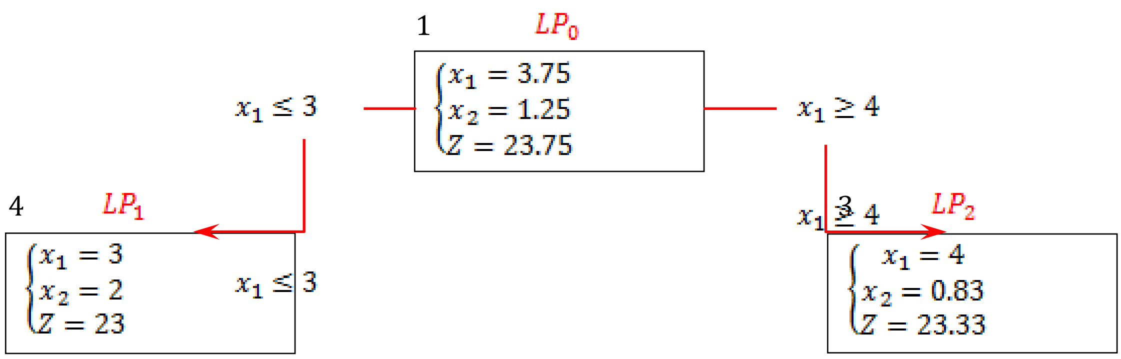
با توجه به جواب بهینه LP داریم: $x_1 = 3.75 , x_2 = 1.25$ ، بنابراین جواب از دیدگاه ILP غیرقابل قبول است. در این صورت فضای جواب LP را با افزودن محدودیت‌هایی، به صورتی اصلاح می‌کنیم که شامل جواب نامطلوب فعلی نشود، بنابراین اگر فضای LP مساله را در حالت فعلی LP_0 بنامیم، دو فضای جدید LP_1 و LP_2 را می‌توانیم به این صورت تعریف نمائیم.

LP_1 فضای $=$ LP_0 فضای $+ (x_1 \le 3)$ محدودیت

LP_2 فضای $=$ LP_0 فضای $+ (x_1 \ge 4)$ محدودیت



جواب بهینه دو فضای جدید LP_1 و LP_2 را بدست می‌آوریم، نتایج بدست آمده در نمودار زیر دیده می‌شود:

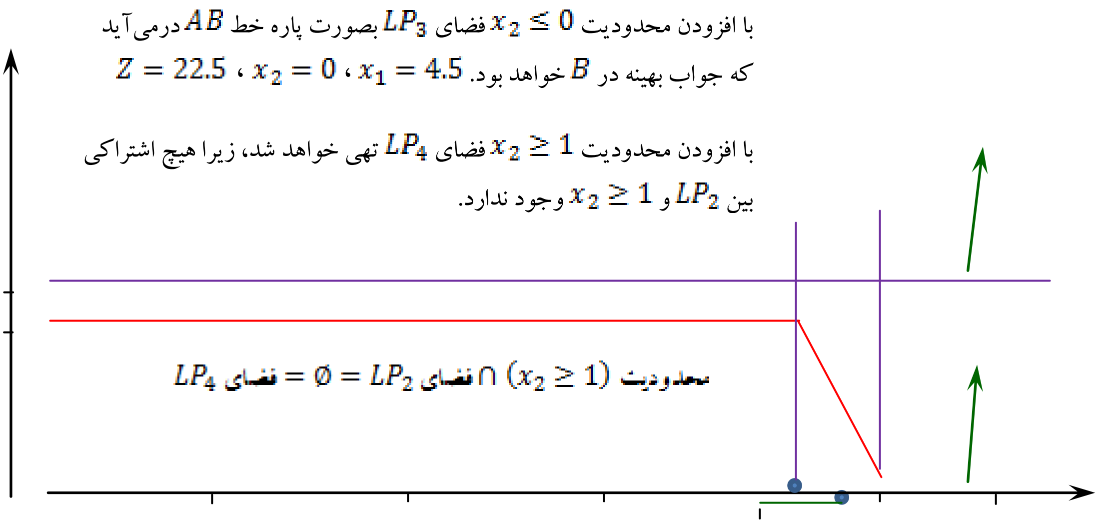


روشن است که فضای LP_1 به جواب صحیح و موجه برای ILP رسیده است. $x_1 = 3$ و $x_2 = 2$ ، بنابراین ادامه ی راه حل را از شاخه ی دیگر انجام می‌دهیم و در LP_2 داریم: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0.83 \end{cases}$ برای اصلاح فضای LP_2 محدودیت‌های $x_2 \geq 1$ را در یک شاخه و $x_2 \leq 0$ را در شاخه ی دیگر قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:

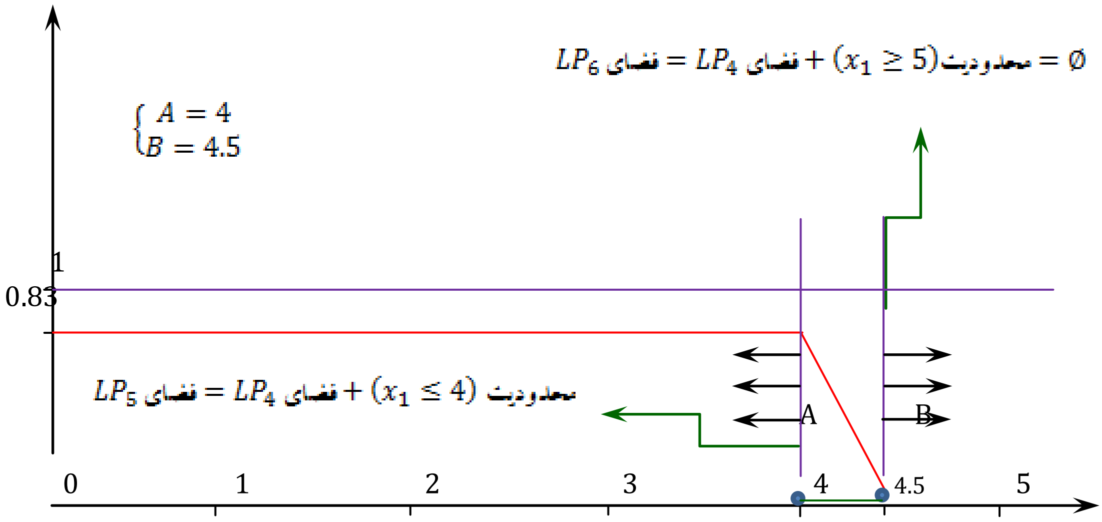
LP_3 فضای $= LP_2$ فضای $+ (x_2 \leq 0)$ محدودیت

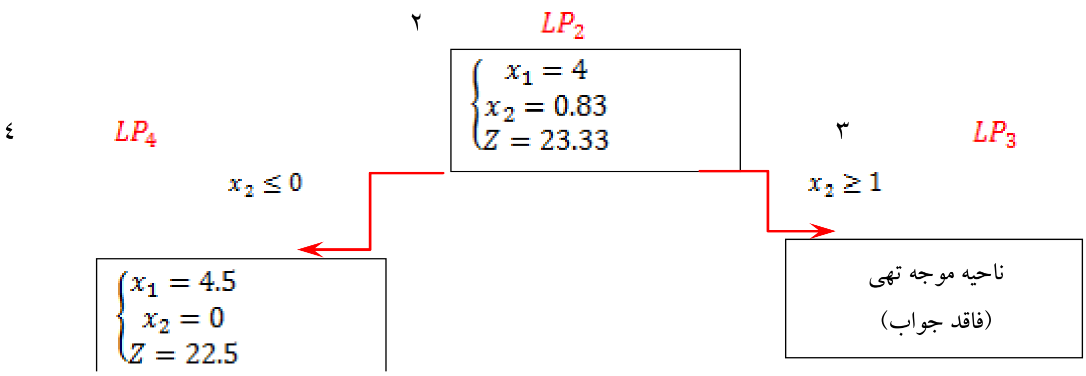
LP_4 فضای $= LP_2$ فضای $+ (x_2 \geq 1)$ محدودیت

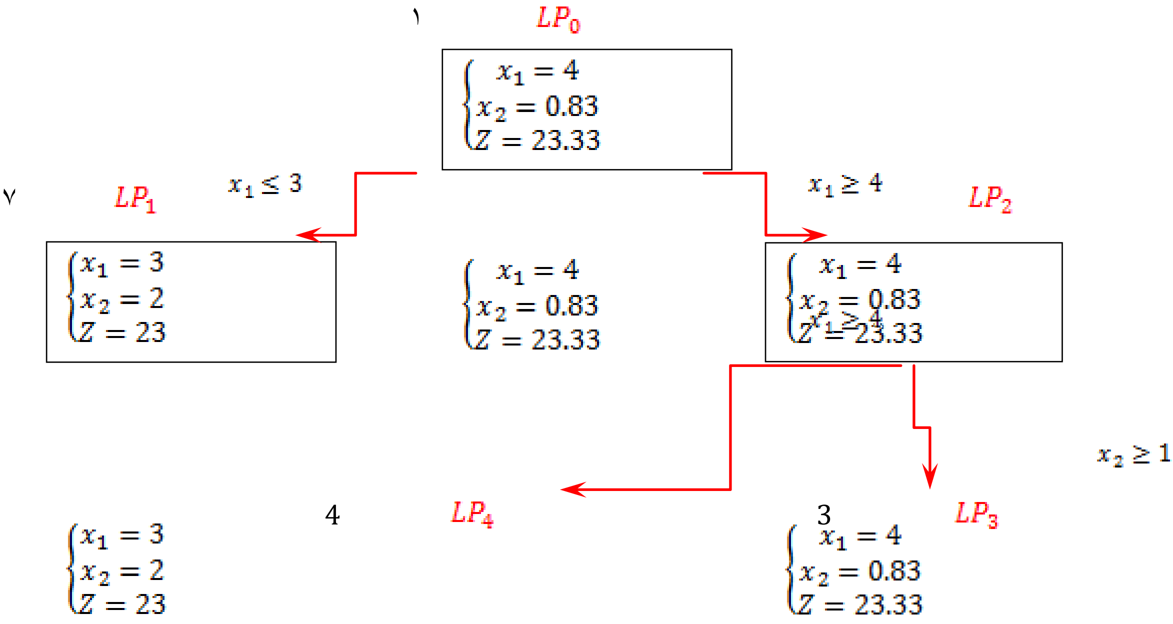
فضای LP_2 را در اینجا با مقیاس بزرگتر نشان می‌دهیم.

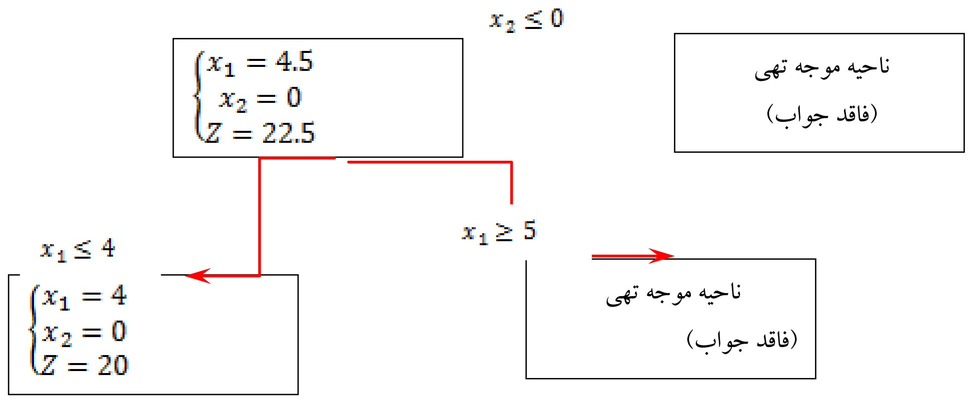


از شاخه LP_3 نمی‌توان مساله را ادامه داد چون فاقد جواب بهینه می‌باشد، بنابراین از شاخه LP_4 به اصلاح فضای موجه می‌پردازیم. در شاخه LP_4 چون $x_1 = 4.5$ است، محدودیت‌های $x_1 \geq 5$ را در یک شاخه و $x_1 \leq 4$ را در شاخه دیگر قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:









با مقایسه شاخه‌ها به جواب (LP_6 ، LP_1) رسیده و داریم: $Z^* = Max\{20\ ,23\} = 23$ ، بنابراین جواب در فضای LP_1 همان جواب بهینه مساله ILP است. یعنی:

$$\begin{cases} x_1^* = 3 \\ x_2^* = 2 \\ Z^* = 23 \end{cases}$$

مراحل اساسی روش شاخه و کران را برای یک مساله با هدف Max بیان می کنیم :

مرحله ۱) مساله را بدون فرض عدد صحیح بودن متغیر های تصمیم با روشهای معمول (هندسی ، سیمپلکس) حل می کنیم.

مرحله ۲) چنانچه جواب بهینه متغیرهای صحیح، عددی صحیح باشد که جواب بهینه بدست آمده است، در غیر اینصورت به مرحله بعدی می رویم (مرحله انشعاب).

مرحله ۳) در هر بار تکرار یکی از متغیرهای غیر صحیح را انتخاب می کنیم و عمل انشعاب را انجام می دهیم، روش انشعاب به این صورت است: هر عدد غیر صحیح را همواره می توان بین دو عدد صحیح متوالی در نظر گرفت.

به عنوان مثال فرض کنید x=3.34 در این صورت ۳<x<۴ می باشد. در این صورت انشعاب، مقادیری از متغیر را مشخص می کند که در این بازه نباشد (در اینجا شامل $x \geq 4$ ویا $x \leq 3$ خواهد بود). بنابراین، دو مسئله ی فرعی جدید بدست می آید مساله اول، با افزودن محدودیت انشعاب اول به مساله اصلی بدست می آید (در اینجا $x \geq 4$) و مساله دوم، با افزودن محدودیت انشعاب دوم به مسئله اصلی بدست می آید (در اینجا $x \leq 3$).

مرحله ۴) مسائل فرعی جدید را حل می کنیم و آزمون به عمق رسیدن را بررسی می کنیم که شامل این سه حالت است:

الف) مقدار تابع هدف مساله ی فرعی، از مقدار تابع هدف در مرحله قبل از آن، کمتر بشود (در مسائل از نوع حداکثر سازی)، برای مرحله شروع، مقدار تابع هدف برای مقایسه منفی، بینهایت در نظر گرفته می شود.

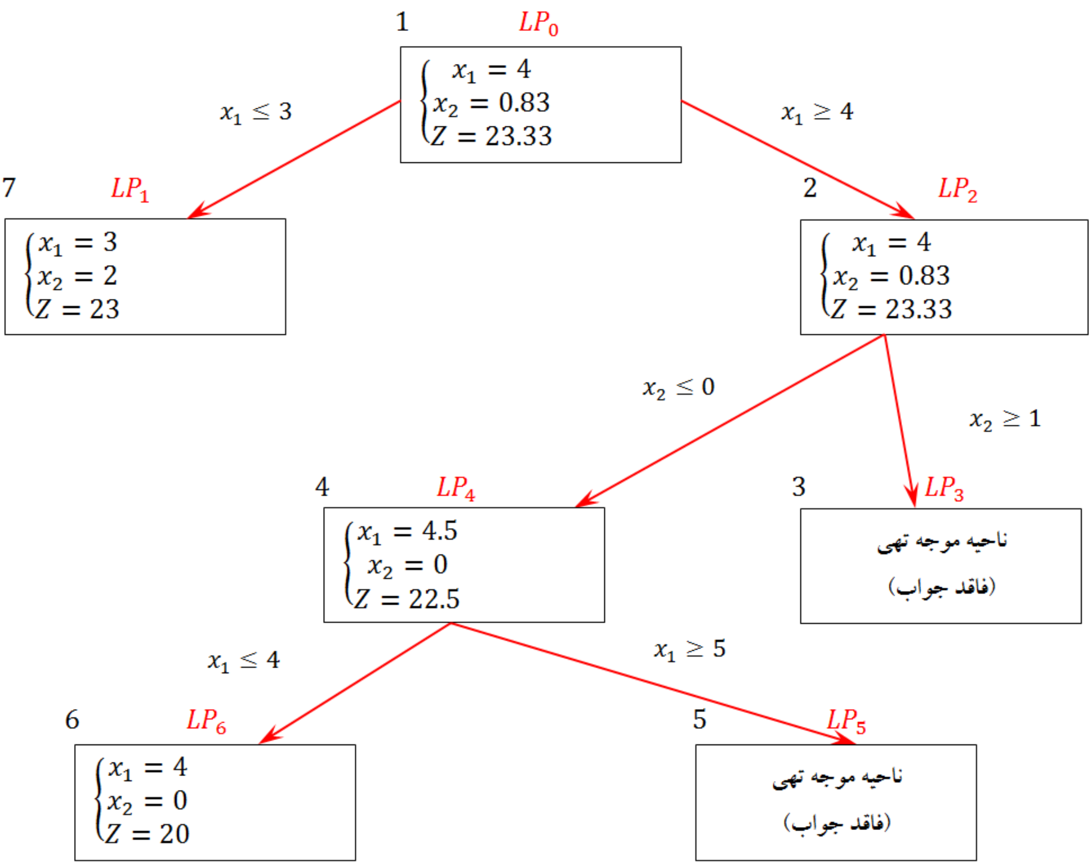
ب) حالت خاص فاقد ناحیه موجه پیش بیاید.

ج) به جواب صحیح برسیم چنانچه این جواب از جوابهای قبلی شاخه ها بیشتر باشد به عنوان بهترین جواب موجود در نظر گفته می شود و جایگزین مقدار تابع هدف برای مقایسه خواهد شد.

مرحله ۵) برای تمام شاخه ها مساله را به عمق می رسانیم، در این صورت بهترین جواب موجود برای تابع هدف (مرحله ۴ قسمت ج) همان جواب بهینه خواهد بود.

نکته: با افزودن هر محدودیت، درجه مطلوبیت تابع هدف کاهش می یابد و یا در بهترین وضعیت تغییر نخواهد داشت.

.



برای مثال حل شده ی قبل، همانطور که در نمودار دیده می شود هر چه به عمق نزدیک می شویم مقدار z در هر شاخه کاهش می یابد. در هر شاخه، مقدار هر سطح نسبت به سطح بالاتر از خود از نظر مطلوبیت کاهش می یابد.

تمرین: مشابه مثال حل شده و بر اساس الگوریتم مطرح شده مسئله زیر را به روش شاخه و کران (تحدید و انشعاب)حل کنید.

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

s.t $x_1 \leq 2$

$x_2 \leq 2$

$x_1 + x_2 \leq 3.5$

$x_1, x_2 \geq 0$ و عدد صحیح

۳-۳- روش برش گومری برای حل مسائل برنامه ریزی عدد صحیح

در روش برش گومری نیز مانند روش شاخه و کران ابتدا مسئله را بدون قید صحیح بودن حل می کنیم، چنانچه مقادیر متغیرهای از نوع صحیح، در جواب بهینه، مقدار صحیح به خود بگیرند که به جواب بهینه رسیده ایم، در غیر اینصورت محدودیت جدیدی به همراه متغیر نظیر این محدودیت، به مدل اضافه می شود، به چنین محدودیتی برش گومری گفته می شود. در محدودیت برش گومری، خاصیت محدب بودن فضای موجه مساله، حفظ می شود. ضمن اینکه محدوده جستجو برای یافتن جوابهای صحیح کاهش می یابد، روش برش گومری را در قالب مثالی بیان می کنیم .

مساله برنامه ریزی خطی عدد صحیح زیر را در نظر می گیریم :

$$Max\ Z = 7x_1 + 9x_2$$

s.t

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$7x_1 + x_2 \leq 35$$

$x_1, x_2 \geq 0$ و عدد صحیح

جواب بهینه، بدون در نظر گرفتن صحیح بودن متغیرهای تصمیم در تابلوی نهایی سیمپلکس زیر آمده است.

در اینجا ضرایب محدودیت ها عدد صحیح است، ولی مقدار سمت راست محدودیتها عددی کسری می باشد. بنابراین باید یک

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z_0	1	0	0	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	63
x_2	0	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{2}$
x_1	0	1	0	$\frac{-1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{2}$

برش کسری (گومری) به مدل اضافه شود، این محدودیت جدید بر اساس یکی از محدودیتهای با سمت راست کسری نوشته خواهد شد. به عنوان یک نکته تجربی، بهتر است محدودیتی انتخاب شود که قسمت اعشار آن بیشتر است، در اینجا قسمت اعشار هر دو محدودیت مساوی است 4.5, 3.5 که هردو قسمت اعشار 0.5 را دارند بنابراین یکی از معادلات را به دلخواه انتخاب می کنیم مثلا x_2 را انتخاب می کنیم با توجه به جدول از محدودیت نظیر x_2، این رابطه بدست می آید:

$$x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 = 3\frac{1}{2}$$

قسمت صحیح هرکدام از ضرایب را از قسمت اعشاری آنها جدا می کنیم بنابراین، این رابطه را خواهیم داشت:

$$X_2 + \left(0 + \frac{7}{22}\right) X_3 + \left(0 + \frac{1}{22}\right) X_4 = \left(3 + \frac{1}{2}\right)$$

در مرحله بعد، ضرایب صحیح را از طرفین رابطه حذف می نماییم:

$$\cancel{X_2 +} \left(\cancel{0} + \frac{7}{22}\right) X_3 + \left(\cancel{0} + \frac{1}{22}\right) X_4 = \left(\cancel{3} + \frac{1}{2}\right)$$

سپس طرفین رابطه را در ۱- ضرب نموده و متغیر برش را به آن اضافه می کنیم تا رابطه زیر بدست آید:

$$S_1 - \frac{7}{22} X_3 - \frac{1}{22} X_4 = -\frac{1}{2}$$

این رابطه برش کسری است و S_1 نیز متغیر گومری است این محدودیت و متغیر جدید باید به جدول بهینه ی مرحله قبل اضافه شود. در این صورت جدول جدید به این صورت خواهد بود:

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	مقادیر سمت راست
Z_0	١	٠	0	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	0	63
x_2	٠	١	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	$3\frac{1}{2}$
x_1	٠	٠	0	$\frac{-1}{22}$	$\frac{3}{22}$	0	$4\frac{1}{2}$
S_1	0	0	0	$-\frac{7}{22}$	$-\frac{1}{22}$	1	$-\frac{1}{2}$

این جدول در حالت فوق بهینه قرار دارد، سطر صفر مثبت، ولی مقادیر سمت راست منفی دارد. وجود سطر با مقدار سمت راست منفی، تابلو را از حالت موجه خارج می سازد. برای ادامه ی حل مدل، ابتدا عملیات یکه سازی متغیر های اساسی را انجام می دهیم و سپس با روش سیمپلکس ثانویه (تحقیق در عملیات ۱) مدل را حل می کنیم. پس از حل مدل جدول زیر بدست می آید:

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	مقادیر سمت راست

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	۰	0	0	1	۸	۵۹
x_2	۰	۰	1	0	0	۱	3
x_1	۰	۱	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$4\frac{4}{7}$
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{-22}{7}$	$1\frac{4}{7}$

چون هنوز متغیرهای اساسی مقدار کسری دارند نیاز به یک برش گومری دیگر داریم. هردو متغیر مقدار اعشاری یکسان دارند یکی از دو محدودیت را به عنوان مبنای معادله برش گومری در نظر می گیریم، مثلا محدودیت نظیر x_1 را می توان به این صورت نوشت :

$$x_1 + \left(0 + \frac{1}{7}\right) x_4 + \left(-1 + \frac{6}{7}\right) S_1 = (2 + \frac{4}{7})$$

که برش گومری نظیر آن، مانند مرحله قبل محاسبه می شد:

$$S_2 - \left(\frac{1}{7}\right) x_4 - \left(\frac{6}{7}\right) S_1 = -\frac{4}{7}$$

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
z_0	1	0	0	0	7	8	0	59
x_2	0	0	1	0	0	1	0	3
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	$4\frac{1}{2}$
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{-22}{7}$	0	$1\frac{4}{7}$
S_2	0	0	0	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-6}{7}$	1	$-\frac{4}{7}$

این برش و محدودیت نظیر آن، به جدول بهینه مرحله قبل اضافه می شود:

مشابه مرحله قبل پس از یکه سازی و حل تابلو به روش سیمپلکس ثانویه جدول زیر بدست می آید:

z_0	۱	۰	۰	۰	۰	۲	7	55
x_2	۰	۰	۱	۰	۰	۱	0	3
x_1	۰	۱	۰	۰	۰	-1	1	4
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	-4	1	1
x_4	۰	۰	۰	۰	۱	6	-7	4

جواب بهینه در این تابلو بدست می آید .

چند نکته :

۱-معادله های برش، هیچکدام از جوابهای شدنی با مختصات صحیح را از ناحیه موجه خارج نمی کند.

۲-شرط اساسی برای بکار بردن این الگوریتم، این است که در مدل تمامی ضرایب و ثابت های سمت راست اعداد صحیح باشند(در صورت لزوم با ضرب طرفین محدودیت در عدد مناسب حالت کسری را از بین می بریم).

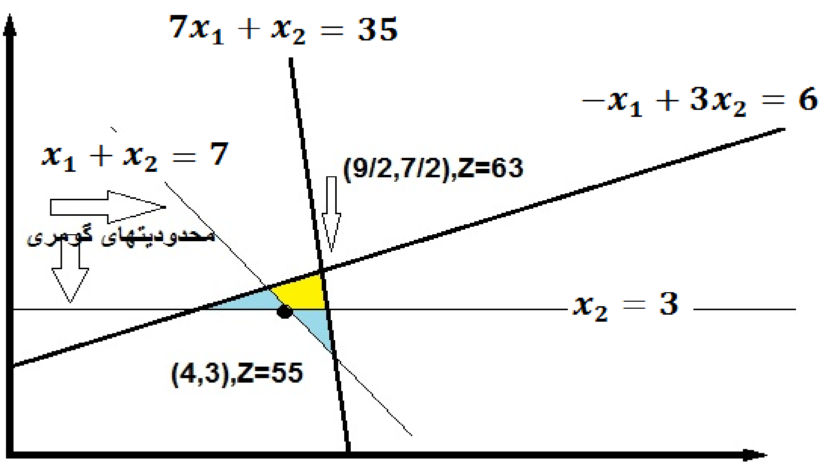
۳-این الگوریتم فرقی بین متغیرهای اصلی مساله و متغیرهای کمکی نمی گذارد، بدین معنی که تمام متغیرها بایستی صحیح باشند.

در این مساله چنانچه محدودیت های مدل را به کمک متغیر های کمکی به صورت تساوی بنویسیم :

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$7x_1 + x_2 + x_4 = 35$$

ودر معادله های برش گومری بجای x_1و x_2 عبارت بر حسب محدودیتهای بالا را بنویسیم، به محدودیتهای $s_1 + x_2 = 3$ که معادل $x_2 \leq 3$ است و $x_1 + x_2 \leq 7$ می رسیم (تکلیف۱: این محاسبات را انجام دهید) با ترسیم ناحیه موجه این مدل و رسم محدودیتهای گفته شده، مشخص می شود که محدودیتها، هیچکدام از جوابهای شدنی صحیح مساله را، حذف نمی کنند و محدب بودن ناحیه را نیز حفظ می کنند. مطابق شکل:



۳-۴- استفاده از متغیرهای صفر و یک در مدل سازی

متغیرهای صفر ویک نوع خاصی از متغیرهای صحیح هستند که تنها مقادیر صفر و یک را اختیار می کنند. علاوه بر مدلهایی که اصولا از نوع صفر و یک هستند، در سایر مدلها نیز از این نوع متغیرها استفاده می شود. در این درس به بعضی از کاربردهای آنها اشاره می شود:

۱- انتخاب یک محدودیت ازبین دو محدودیت :

فرض کنید در یک مدل تحت شرایطی یک محدودیت خاص برقرار می شود و در شرایط دیگر یک محدودیت دیگر جانشین آن می گردد، در این صورت یک روش پیاده سازی این مطلب، می تواند مطابق الگوی مثال زیر باشد:

مثال : می خواهیم از بین دو محدودیت زیر، تنها یکی انتخاب شود :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1500 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 2000 \end{cases}$$

در این صورت از متغیر صفر و یک y استفاده می کنیم:

$Y=0$ اگر محدودیت اول برقرار شود .

$Y=1$ اگر محدودیت دوم برقرار شود.

اگر M عدد مثبت بسیار بزرگی فرض شود شرایط مورد نظر به این صورت بازنویسی خواهد شد:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1500 + MY \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 2000 + M(1 - Y) \end{cases}$$

اگر $Y=0$ باشد، در این صورت محدودیت دوم، محدودیتی زائد خواهد بود زیرا مقدار سمت راست آن عددی بی نهایت بزرگ می شود :

$$2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 2000 + M$$

و روشن است که شرط کمتر از بی نهایت بودن، به ازای هرکدام از مقادیر متغیرهای تصمیم برقرار خواهد بود . در حالیکه محدودیت اول به صورت $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1500$ در می آید که محدودیتی موثر است. اگر $Y= 1$ شود در این صورت محدودیت اول محدودیتی زائد خواهد بود، زیرا مقدار سمت راست آن عددی بی نهایت بزرگ می شود :

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1500 + M$$

و روشن است که شرط کمتر از بی نهایت بودن، به ازای هرکدام از مقادیر متغیرهای تصمیم برقرار خواهد بود . در حالیکه محدودیت دوم به صورت زیر برقرار است:

$$2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 2000$$

یک روش دیگر بازنویسی مدل به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1500 + My_1 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 2000 + My_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_i = 0 \text{ or } 1$$

۲- انتخاب **K** محدودیت ازبین **N** محدودیت :

با مثالی روش استفاده ازمتغیر های صفر و یک را بیان می کنیم:

فرض کنید این محدودیتها را داریم:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 2000 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 2500 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1500 \end{cases}$$

و می خواهیم تحت هر شرایطی دقیقا یک محدودیت برقرار شود، در این صورت خواهیم داشت :

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 2000 + My_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 2000 + My_2 \\ + My_3 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 2500 \\ + My_4 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1500 \\ \sum_{i=1}^{4} y_i = 3 \;;\; y = 0 \; or \; 1 \end{cases}$$

در اینجا اگر جمع yها برابر سه بشود، یعنی سه محدودیت مقادیر سمت راست مثبت بی نهایت به خود می گیرند. بنابراین همواره برقرار و لذا محدودیتهایی زائد خواهند شد و تنها یک محدودیت که y نظیر آن، صفر شده است به صورت موثر در می آید؛ لذا تنها یک محدودیت موثر خواهیم داشت.

تعمیم مساله انتخاب k محدودیت از بین N محدودیت به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = N - k \;;\; y = 0 \; or \; 1$$

۳- انتخاب حداقل **k** محدودیت ازبین **N** محدودیت :

اگر در مساله ی قبل بخواهیم حداقل یک محدودیت را برقرار نماییم، باید شرط $\sum_{i=1}^{4} y_i \leq 3 \;;\; y = 0 \; or \; 1$ را داشته باشیم:

و تعمیم این شرط به صورت : $\sum_{i=1}^{N} y_i \leq N - k \;;\; y = 0 \; or \; 1$ خواهد بود.

۴- انتخاب حداکثر K محدودیت ازبین N محدودیت :

اگر در مساله ی قبل بخواهیم حداکثر یک محدودیت را برقرار نماییم، باید شرط

$$\sum_{i=1}^{4} y_i \geq 3 \ ; \ y = 0 \ or \ 1$$

را داشته باشیم:

و تعمیم این شرط به صورت :

$$\sum_{i=1}^{N} y_i \geq N - k \ ; \ y = 0 \ or \ 1$$

خواهد بود.

۵- پیاده سازی محدودیت های با چند مقدار متمایز در سمت راست:

فرض کنید تحت شرایط مختلف سقف موجودی یک منبع تغییر می کند(مقادیر ۲۰۰۰و یا ۱۵۰۰ و یا ۱۰۰۰) و برای تولید هر واحد از سه نوع محصول تولیدی یک کارخانه نیازمند ۳و ۴ و۵ واحد از این منبع هستیم. در این صورت چنین محدودیتی به این صورت نوشته می شود:

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 2000 \text{ یا } 1500 \text{ یا } 1000$$

به کمک متغیرهای صفر و یک این محدودیت به این صورت بازنویسی خواهد شد:

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 2000y_1 + 1500y_2 + 1000y_3$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$
$$y_1, y_2, y_3 = 0 \ \ or \ 1$$

یکی از حالات خاص مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح مدل برنامه ریزی صفر و یک (Binary) است که در آن متغیرهای تصمیم تنها دو حالت دارند که یکی از آنها را صفر و دیگری را یک در نظر می گیریم، روشهای مختلفی برای حل این مسائل وجود دارد، از بین این روشها الگوریتم بالاس، شباهت زیادی به روش شاخه و کران (انشعاب و تحدیدBranch & Bound) دارد. برای اجرای این روش ابتدا مدل مساله را به صورت زیر در می آوریم :

$$0 \leq C_1 \leq C_2 \leq C_3 \dots . \leq C_n Min \ Z = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

s.t $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i \geq b_j$ j=1,…,m

$$X_i = 0 \ \ or \ 1$$

در یک مدل صفر و یک، همواره می توان تابع هدف را به صورت عبارت با ضرایب مثبت درآورد و کافیست متغیرهای با ضرایب منفی را با تغییر متغیر $X'_i = 1 - X_i$ تبدیل به متغیر با ضرایب مثبت نماییم، سپس تابع هدف را براساس ضرایب مثبت بدست آمده به صورت صعودی بنویسیم و اندیس متغیرهای تصمیم را نیز بر اساس ضرایب آنها به صورت صعودی تنظیم کنیم (به کمک تغییر متغیر).

مثال: تابع هدف min Z=2X1-5X2+X3 را که در آن X1,X2,X3 متغیرهای صفر و یک هستند به صورت مناسب برای الگوریتم بالاس بازنویسی نمایید.

حل: ابتدا متغیر X2 را با تغییر متغیر Y2=1-X2 به صورت متغیر با ضریب مثبت در تابع هدف می نویسیم، بنابراین minZ=2X1+5Y2+X3 سپس عبارت تابع هدف را به صورت مرتب شده براساس ضرایب تابع هدف می نویسیم minZ=X3+2X1+5Y2 حال برای هماهنگی اندیس متغیرها با حالت صعودی ضرایب می توانیم تغییر متغیر X3=t1وX1=t2وY2=t3 را بکار ببریم، در این صورت min Z=t1+2t2+5t3 که عبارت با ضرایب مثبت صعودی است و اندیس متغیر های تصمیم نیز حالت صعودی دارد . برای محدودیتها نیز کافیست در حالت کوچکتر، مساوی طرفین رابطه را در منفی ضرب نموده تا جهت نامساوی عوض شود.

۳-۴-۱- مراحل اجرای الگوریتم بالاس (Balas)

ابتدا فرض می کنیم همه متغیرهای تصمیم مقدار صفر را داشته باشند، اگر با چنین فرضی همه محدویتها ی مدل برقرار شوند که به جواب بهینه Z=0 رسیده ایم؛ در غیر اینصورت روی اولین متغیر تصمیم (که در تابع هدف به صورت گفته شده کمترین ضریب را دارد) انشعاب صفر و یک را اجرا می کنیم و با فرض صفر بودن متغیر های تصمیم با اندیس بالاتر موجه بودن جواب (یعنی صدق کردن جواب فعلی در همه محدودیتهای مدل)را بررسی می کنیم که در این صورت چهار حالت مختلف مطابق جدول زیر پیش خواهد آمد. در سه حالت به عمق می رسیم و انشعاب را متوقف می کنیم و در یک حالت نیز امکان ادامه انشعاب وجود دارد؛ عمل انشعاب را تا زمانی ادامه می دهیم که همه گره ها به عمق برسند پس از به عمق رسیدن همه گره ها آخرین مقدارz مقدار بهینه و گره مربوط به آن مقادیر متغیرها در حالت بهینه را مشخص می کند.

X1	X2	X3	X4	X5	X6
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1

شماره حالت	شرح وضعیت پاسخ تکمیلی	وضعیت تابع هدف	اقدام
۱ رسیدن به عمق	در گره فعلی پاسخ تکمیلی صفر ناموجه و هیچکدام از پاسخهای تکمیلی نیز نمی توانند موجه باشند. (محدویتهایی در بهترین حالت پاسخ تکمیلی نیز نمی توانند برقرار شوند)	پاسخ ناموجه است	توقف انشعاب
۲ رسیدن به عمق	در گره فعلی پاسخ تکمیلی صفر موجه است	مقدار فعلی تابع هدف نسبت به آخرین مقدار موجه بدست آمده بهتر نیست	توقف انشعاب
۳ رسیدن به عمق	در گره فعلی پاسخ تکمیلی صفر موجه است	مقدار فعلی تابع هدف نسبت به آخرین مقدار موجه بدست آمده بهتر است	بجای مقدار قبلی تابع هدف مقدار جدید را جایگزین کنید. توقف انشعاب
۴	در گره فعلی پاسخ تکمیلی صفر ناموجه است ولی بعضی از پاسخهای تکمیلی موجه هستند	پاسخ نا موجه است	بررسی انشعاب جدید

چند قرارداد و نکته مربوط به جدول فوق:

۱-منظور از جوابهای تکمیلی تا یک مرحله خاص، تمام حالات ممکن برای متغیرهایی است که تاکنون مقدار آنها در مراحل انشعاب مشخص نشده است.

مثال: فرض کنید در یک مدل با متغیرهای تصمیم X1…X6 در یکی از انشعاب ها X1=1 ,X2=0 , X3=1 در نظر گرفته شده است، در این صورت تمام جوابهای تکمیلی را بنویسید.

1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1

در اینجا ۸ جواب تکمیلی داریم، اولین جواب تکمیلی که در آن سایر متغیرها (که هنوز در مرحله فعلی انشعاب مقادیر آنها مشخص نشده است) صفر فرض می شوند را جواب تکمیلی صفر می نامیم.

۲-منظور از جواب تکمیلی موجه، جوابی تکمیلی است که در تمام محدودیت های مدل صدق می کند.

۳-منظور از جواب تکمیلی ناموجه، جوابی تکمیلی است که حداقل در یکی از محدودیتهای مدل صدق نمی کند.

۴-بهترین حالت یک جواب تکمیلی برای یک محدودیت بزرگتر، مساوی حالتی است که در آن مقادیر متغیرهای باقیمانده با ضرایب منفی صفر و برای ضرایب مثبت یک شود.

مثال: برای محدودیت

$$-5X_1 - 3X_2 + X_3 + 3X_4 - 2X_5 + X_6 \geq -2$$

با فرض اینکه مقادیر X1=1 ,X2=0,X3=1 را داشته باشیم بهترین پاسخ تکمیلی را بدست آورید.

حل: در اینجا چون محدودیت بزرگتر مساوی است، در بهترین شرایط باید متغیرهای باقیمانده با ضرایب مثبت، حداکثر مقدار خود یعنی یک را بگیرند و متغیر های باقیمانده با ضرایب منفی حداقل مقدار خود، یعنی صفر را بگیرند؛ در این صورت داریم : -5(1)-3(0)+1(1)+3(1)-2(0)+1(1)≥-2 بنا براین $0 \geq -2$ یعنی در بهترین پاسخ تکمیلی این محدودیت برقرار است.

حال فرض کنید در محدودیت قبلی در یک انشعاب دیگر X1=1,X2=1,X3=0 فرض شود در این صورت در بهترین جواب تکمیلی داریم $-5(1)-3(1)+1(0)+3(1)-2(0)+1(1) \geq -2$ بنابراین به عبارت نادرست $-4 \geq -2$ خواهیم رسید. یعنی در این انشعاب از مدل، محدودیت گفته شده حتی در حالت ایده آل نیز برقرار نمی شود؛ به بیان دیگر این محدودیت در انشعابهای بعدی هرگز برقرار نخواهد شد، پس گره مورد بررسی به عمق رسیده است و انشعاب را ادامه نمی دهیم.

۵-وقتی در یک انشعاب پاسخ تکمیلی صفر موجه است، دیگر انشعاب را ادامه نمی دهیم؛ زیرا در هرجواب بعدی، متمایز از این جواب، حداقل یکی ازمتغیرهای باقیمانده مقدار یک را به خود می گیرد که با توجه به شکل تابع هدف در الگوریتم بالاس به معنای افزودن به تابع هدف Min است(کاهش مطلوبیت).

مثالی از اجرای الگوریتم بالاس:

با الگوریتم شاخه و کران برای برنامه ریزی صفر و یک(روش بالاس)مدل داده شده را حل کنید :

$$\mathbf{Min\ Z = 3X_1 + 5X_2 + 6X_3 + 9X_4 + 10X_5 + 10X_6}$$

$$\mathbf{-2X_1 + 6X_2 - 3X_3 + 4X_4 + X_5 - 2X_6 \geq 2 \qquad (1)}$$

$$\mathbf{-5X_1 - 3X_2 + X_3 + 3X_4 - 2X_5 + X_6 \geq -2 \qquad (2)}$$

$$5X_1 - X_2 + 4X_3 - 2X_4 + 2X_5 - X_6 \geq 3 \qquad (3)$$

$$J=1\ldots6 \quad X_j = 0\ OR\ 1$$

نمودار انشعاب و جدول نقاط به عمق رسیدن نقاط انشعاب و دلیل هر توقف انشعاب، در جدول آمده است. در نهایت از بین سه نقطه انتهایی موجه، نقطه ای که کمترین مقدار تابع هدف را ایجاد می کند، به عنوان جواب بهینه انتخاب شده است (۰و۰و۰و۱و۱و۰) که در آن Z=11 بدست آمده است.

نام نقطه	علت به عمق رسیدن	مقدار Z در حالت موجه
A	محدودیت ۲ در بهترین پاسخ تکمیلی نیز برقرار نخواهد شد	-----
B	محدودیت ۳ در بهترین پاسخ تکمیلی نیز برقرار نخواهد شد	-----
C	محدودیت ۳ در بهترین پاسخ تکمیلی نیز برقرار نخواهد شد	-----
D	پاسخ تکمیلی صفر موجه است	۱۱**
E	محدودیت ۱در بهترین پاسخ تکمیلی نیز برقرار نخواهد شد	-----
F	محدودیت ۱ در بهترین پاسخ تکمیلی نیز برقرار نخواهد شد	------
G	محدودیت ۱ در بهترین پاسخ تکمیلی نیز برقرار نخواهد شد	-----
H	پاسخ تکمیلی صفر موجه است	۱۲
I	محدودیت ۳ در بهترین پاسخ تکمیلی نیز برقرار نخواهد شد	------
J	پاسخ تکمیلی صفر موجه است	۲۵

۳-۵-آشنایی با بعضی از مسائل کلاسیک ILP (برنامه ریزی عدد صحیح)

۳-۵-۱- مسئله فروشنده دوره گرد:

فرض کنید شما می خواهید به تعدادی از شهرها بروید و سپس به مبدا حرکت برگردید متغیر صفر و یک x_{ij} را به این صورت تعریف می کنیم1= x_{ij} اگر شهر i بلافاصله قبل از شهر jملاقات شده باشد فرض کنید d_{ij} نشان دهنده فاصله بین شهرهای i و j باشد، فرض کنید n شهر وجود داشته باشد که باید ملاقات شوند در این صورت مسئله TSP به این صورت مدل سازی می شود:

$$Min\ z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

۱) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ برای هر j

۲) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ برای هر i

۳) $\sum_{i\in s}\sum_{j\in s} x_{ij} \leq |s|-1 \qquad |s|<n$ برای هر

محدودیت یک بیان می کند که شما تنها یکبار می توانید وارد شهر j شوید.

محدودیت دو بیان می کند که شما تنها یکبار می توانید ازشهر i خارج شوید.

محدودیت سه بیان می کند که زیر دور نیز نباید وجود داشته باشد (حلقه بسته ای از زیر مجموعه ای از شهرها).

کاربرد این مدل در مسیر یابی کشتی ها و وسایل نقلیه برای پوشاندن مجموعه ایستگاههای مشخصی می باشد، بطوریکه مسیرها به حداقل برسد و همه ایستگاهها نیز طی شوند .

۳-۵-۲- مسئله کوله پشتی knapsack

فرض کنید تعدادی گزینه در اختیار داریم که باید زیر مجموعه ای از آنها را انتخاب کنیم تا کوله پشتی ما پر شود، ولی کوله پشتی ما فضای محدودی دارد. هر کدام از گزینه ها ارزش v_i را دارند و وزن هر کدام از گزینه ها w_i می باشد

فرض کنید $x_i = 1$ اگر گزینه i انتخاب شود و $x_i = 0$

اگر گزینه i انتخاب نشود و مقدار b بیانگر کل فضای موجود در کوله پشتی است بنابراین، این مساله به این صورت مدلسازی می شود:

$$Max\ z = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq b$$

نسخه صفر و یک کوله پشتی نشان می دهد که هر گزینه یک بار می تواند انتخاب شود. یک تعمیم از مساله ی کوله پشتی، این است که بتوان از هر گزینه چند نسخه برداشت کرد که در این صورت متغیر x_i اعداد صحیح مثبت را می تواند به خود بگیرد (احتمالا با سقف تعداد انتخاب برای هر متغیر).

۳-۵-۳- مسئله بسته بندی در جعبه ها bin packing

مدل بسته بندی، تعمیمی از مساله ی کوله پشتی است. فرض کنید مجموعه ای از m جعبه با اندازه های مساوی به ما داده شده است، مثلا اندازه bو یک مجموعه از n کالا که باید در جعبه ها قرار گیرد، فرض کنید w_i اندازه کالای i ام باشد در این صورت متغیر صفر و یک x_{ij} را به این صورت تعریف می کنیم $x_{ij} = 1$ اگر کالای i در جعبه j قرار گیرد.

معمولا مساله بسته بندی در جعبه ها را، به عنوان مساله حداقل سازی تعداد جعبه های مورد نیاز تعریف می کنند. فرض کنید متغیر دیگری مانند y_j را به این صورت که y_j=۱، اگر جعبه نظیر آن استفاده شود تابع هدفی که برای حداقل سازی جعبه ها لازم است و محدودیت های آن به این صورت نوشته می شوند:

$$Minimize \sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_{ij} \leq y_j b \quad for\ all\ j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad for\ all\ i$$

یکی از کاربردهای این مدل تخصیص افراد به ایستگاههای کاری است، بطوریکه تعداد ایستگاهها حداقل بشود.

۳-۶- مسائل تقسیم بندی مجموعه ها Set Partitioning

بسیاری از مسائل در بهینه سازی به صورت تقسیم بندی یک مجموعه در قالب زیر مجموعه هایی با عناوین مختلف است بطوریکه هدف خاصی بهینه شود. سه گروه از این نوع مسائل را در قالب سه مثال بیان می کنیم.

مثال) تخصیص کادر پرواز به هر پرواز:

در اینجا می خواهیم مشخص نماییم کدام تیم پرواز *(crew)* به کدام شماره پرواز اختصاص یابد، بطوریکه جمع هزینه های تخصیص به حداقل برسد.

قرار داد: $a_{ij} = 1$ اگر تیم پرواز i به پرواز j اختصاص یابد و: $a_{ij} = 0$ اگر تیم پرواز i به پرواز j اختصاص نیابد

x_j متغیر صفر و یک انتخاب یک پرواز است

C_j پارامتر هزینه تخصیص برای پرواز j است

با توجه به این قراردادها و هدف حداقل سازی هزینه ی تخصیص، این مدل را خواهیم داشت :

$$Min\ z = \sum_{j} C_j\, x_j$$

$$subject\ to \quad \sum_{j} a_{ij} x_j = 1 \quad for\ all \quad i = 1, .., m$$

$$x_j = 0\ \ or\ 1 \quad for\ all\ j$$

محدودیت ۱ بیان می کند که به هر پرواز تنها یک تیم پرواز اختصاص می یابد زمانیکه پرواز j انتخاب می شود مقدار $x_j = 1$ خواهد شد بنابراین محدودیت به این صورت است:

$$\sum a_{ij}(1) = 1 \quad for\ all \quad i = 1, .., m$$

$$\rightarrow a_{1j} + a_{2j} + \cdots a_{mj} = 1$$

چون متغیر a_{ij} به صورت صفر و یک است تنها یکی از جملات این عبارت ۱ و بقیه صفر می باشد. به عنوان مثال $a_{kj} = 1$ و سایر جملات صفر فرض می شود، در این صورت تنها تیم k به پرواز j اختصاص می یابد .

مثال) تخصیص خدمات شهرداری(اختصاص ماشین های جمع آوری زباله به خیابانهای مشخص):

دراین حالت، بر خلاف مثال قبل ممکن است یک تخصیص با تکرار باشد، به عنوان مثال یک ماشین بیش از یک بار به یک خیابان سرکشی کند در این صورت محدودیت یک به این صورت تغییر می کند:

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq 1 \quad for\ all \quad i = 1,..,m$$

و چنانچه هدف، کمینه سازی هزینه ها باشد با همان تعاریف مثال قبل، مدل به صورت زیر خواهد بود:

$$Min\ z = \sum_j C_j\, x_j$$

$$subject\ to \quad \sum_j a_{ij} x_j \geq 1 \quad for\ all \quad i = 1,..,m$$

$$x_j = 0 \ \ or\ 1 \quad for\ all\ j$$

به این نوع مسائل، مساله پوشش دهی گفته می شود (Covering Problem).

مثال) مساله سفارشات و ماشینها:

دربعضی از مسائل، فهرستی از سفارشات را دریافت نموده ایم و ما زیر مجموعه های مختلفی از سفارشات را با ماشینهای مختلفی انجام می دهیم. در شرایطی ممکن است امکانات کافی برای اجرای همه سفارشات وجود نداشته باشد، بنابراین باید سفارشات را طوری به ماشینها اختصاص دهیم که سود ناشی از اجرای سفارشات به حداکثر مقدار خود برسد، با فرض اینکه پردازش هر سفارش توسط هر ماشین (در صورت انتخاب سفارش)تنها یکبار انجام می شود و با هدف حداکثر سازی سود مدل به این صورت خواهد بود:

$$Max\ \ z = \sum_j C_j\, x_j$$

$$subject\ to \quad \sum_j a_{ij} x_j \leq 1 \quad for\ all \quad i = 1,..,m$$

$$x_j = 0 \ \ or\ 1 \quad for\ all\ j$$

به مدلهای نظیر این مسائل Packing Models گفته می شود.

۳-۵-۴- تعمیم مدل تخصیص Generalized Assignment Problem

یاد آوری: مدل تخصیص که در تحقیق ۲ به آن اشاره شد نیز یک مدل صفر و یک است و شکل کلی مدل آن به این صورت است:

$$Min\ z = \sum_i \sum_j C_{ij}\, x_{ij}$$

$$subject\ to \quad \sum_j x_{ij} = 1 \quad for\ all \quad i = 1, . . , n$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad for\ all \quad j = 1, . . , n$$

$$x_{ij} = 0 \ \ or\ 1 \quad for\ all\ i, j$$

محدودیت ۱ نشان دهنده تخصیص هر فرد، تنها به یک شغل و محدودیت ۲ نشان دهنده تخصیص هر شغل، تنها به یک فرد می باشد (تناظر یک به یک بین مشاغل و افراد).

تعمیم مدل تخصیص: یک تعمیم ساده از مدل تخصیص می تواند به این صورت باشد که هر شغل باید به یک فرد مشخص تخصیص داده شود، ولی هر فرد ظرفیت انجام بیش از یک شغل را دارد. در حالت خاص فرض کنید هر کارمند j زمان محدودی را دارد (مثلا b_j ساعت) و همچنین وظیفه i برای کارمند j به میزان a_{ij} وقت می برد، در این صورت با هدف حداقل سازی هزینه تخصیص این مدل را خواهیم داشت:

$$Min\ z = \sum_i \sum_j C_{ij}\, x_{ij}$$

$$subject\ to \quad \sum_j x_{ij} = 1 \quad for\ all \quad i = 1, \dots m$$

$$\sum_i a_{ij} x_{ij} \le b_j \quad for\ all\ \ j = 1, . . , n$$

$$x_{ij} = 0 \ \ or\ 1 \quad for\ all\ i, j$$

تعمیم مسئله تخصیص، کاربردهایی در مسئله حمل و نقل دارد. در جایی که سفارشات هر مشتری باید به یک وسیله اختصاص داده شود، اما یک وسیله نقلیه می تواند سفارشات بیش از یک مشتری را حمل کند.

نتیجه گیری :

از آنجا که در دنیای واقعی، بعضی یا تمام متغیرهای تصمیم باید عدد صحیح باشند، لذا ، اغلب با مسائل برنامه ریزی عدد صحیح سرو کار داریم. مسائل عدد صحیح پیچیده تر از مسائلی هستند که متغیرهای آنها محدودیت عدد صحیح نداشته باشند . مهمترین عامل تعیین کننده در مورد زمان محاسبات ، تعداد متغیرهای تصمیم و ساختار مساله است .

فصل چهارم: تصمیم گیری چند شاخصه

۴-۱- ماهیت تصمیم‌گیری چند معیاره

تصمیم گیری را می توان فرآیند انتخاب یک گزینه از بین چند گزینه، تعریف کرد. فرآیند تصمیم گیری شامل چند مرحله می‌باشد: مساله یابی و شناخت مساله، شناسایی راه حل ها، ارزیابی گزینه ها یا راه حل ها و تعیین بهترین گزینه یا راه حل.

تصمیم‌گیری زمانی حسی است که مسائل تک معیاری را در نظر داشته باشد، زیرا ما تنها باید گزینه ای که بالاترین درجه از ترجیحات را در آن معیار دارد انتخاب کنیم. با این وجود، وقتی تصمیم گیرنده روش‌های جایگزین را با معیارهای متعدد ارزیابی می‌کند، بسیاری از مشکلات مثل وزن معیارها، وابستگی ترجیحات و تضاد در بین معیارها مسائل را پیچیده‌تر کرده و باید توسط روش‌های کارآمدتری حل شوند.

برای حل مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره (MCDM)، دراولین مرحله، هدف تصمیم گیری بایستی مشخص گردد. مرحله بعدی اینست که چه تعداد شاخص و معیار در مساله وجود دارد. در مرحله بعدی، گزینه ها یا راهکارهای حل مساله، شناسایی می شوند. در مرحله بعدی بایستی داده‌ها یا اطلاعات مناسبی را جمع آوری کنیم که این داده ها می توانند عینی یا ذهنی باشند. ترجیحات تصمیم گیرندگان در زمینه ی ارزیابی گزینه ها بر اساس معیارها، نمونه ای از داده های ذهنی می باشد که توسط تیم تصمیم گیری می تواند جمع آوری شود. از طرفی، داده های عینی دارای مقدار واقعی می باشند (مانند میزان سود، مصرف سوخت و ...) و در مرحله بعدی، روش هایی استفاده می شود تا به تصمیم گیرنده برای ارزیابی و رتبه‌بندی و یا بهبود روش‌های احتمالی یا گزینه ها کمک‌کند (مثلا انتخاب بهترین تامین کننده یا بهترین کارمند).

در حالت کلی مسائل MCDM می‌تواند به دو طبقه ی اصلی تقسیم شود:

۴-۱-۱-تصمیم‌گیری چند شاخصه (MADM)

۴-۱-۲-تصمیم‌گیری چند هدفه (MODM)

دسته اول برای ارزیابی گزینه ها و انتخاب بهترین گزینه در فضای گسسته به کار می رود. در این دسته، گزینه ها از قبل مشخص و بایستی از بین آنها یکی را انتخاب کرد. مانند انتخاب یک تامین کننده از بین چند تامین کننده. دسته دوم، که به ویژه برای طرح / برنامه‌ریزی مناسب است، با هدف دستیابی به اهداف مطلوب شده، از طریق در نظر گرفتن تعاملات گوناگون در محدوده‌های مدنظر می‌باشد. برای مثال، مساله تخصیص بهینه سفارشات به تامین کنندگان که در آن به دنبال پیدا کردن میزان سفارش به هر تامین کننده می باشیم تا تابع هدف هزینه کمینه و تابع هدف سرویس بیشینه گردد.

در این کتاب در ادامه به شرح کامل روش های تصمیم گیری چند شاخصه و چند هدفه پرداخته خواهد شد.

۴-۱-۱- تصمیم گیری چند شاخصه

مراحل تصمیم گیری چند شاخصه

۴-۱-۱-۱- تعریف هدف تصمیم گیری

در مسائل تصمیم گیری، مدیران و تصمیم گیرندگان به دنبال حل یک مساله یا اهداف خاصی هستند . این هدف می تواند خرید خودرو، خرید منزل و انتخاب یک کارخانه از بین چند کارخانه و یا انتخاب یک تکنولوژی مناسب از بین چند تکنولوژی باشد.

۴-۱-۱-۲- استخراج شاخصه های تصمیم :

شاخص های مرتبط با موضوع تصمیم گیری را می توان با جست و جو و مطالعه در ادبیات موضوعات مرتبط و استفاده از خبرگان و کارشناسان در موضوع مورد نظر استخراج کرد و شاخصه ها را برای موضوع مورد نظر به کار برد.

۴-۱-۱-۳- شناسایی گزینه ها:

مرحله بعدی برای تصمیم گیری چند شاخصه، شناسایی گزینه ها می باشد که این کار بایستی با وقت زیادی انجام گیرد.

۴-۱-۱-۴- تشکیل ماتریس تصمیم گیری:

به منظور یک تصمیم گیری اثربخش، گزینه ها بایستی بر اساس گزینه های مرتبط ارزیابی گردند. بدین منظور بایستی ماتریس تصمیم گیری تشکیل گردد که در نهایت ماتریس تصمیم به صورت شکل زیر می باشد :

شاخص ها / گزینه ها	C_1	C_2	...	C_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a
.	.	.		.
.	,	.	...	.
.	.	.		.
A_n	a_{m1}	a_{m2}	...	
	a_{mn}			

می توان گفت A_iنشان دهنده ی گزینه ی i ام، a_{ij} نشان دهنده ی ارزش گزینه ی i ام می باشد.

به منظور ارزیابی گزینه ها، شاخص های شناخته شده در مراحل قبل استفاده می گردد. این شاخص ها کمی یا کیفی اند.

در ماتریس تصمیم برای شاخص های کمی (قیمت، ساعت و هزینه) امتیاز یا عدد بدست آمده ی گزینه در آن شاخص را قرار می دهیم . برای معیارهای کیفی، بهتر است آنها را به شاخص های کمی تبدیل کنیم. که از روش زیر می توان معیاری های کیفی را به معیار های کمی تبدیل کرد.

۴-۲-تبدیل شاخص های کمی به کیفی

روش های مختلفی برای تبدیل شاخص های کیفی به شاخص های کمی وجود دارد که استفاده از مقیاس فاصله ای و رتبه ای یا مقیاس دوقطبی معمول ترین این روش ها می باشند . روش مقیاس دو قطبی یک مقیاس ۱۱ نقطه ای است که برای شاخص های با جنبه مثبت و منفی به ترتیب به صورت زیر بیان شده است :

شاخص ها با جنبه مثبت	۱۰ خیلی زیاد	۹	۸	۷ زیاد	۶	۵ متوسط	۴	۳	۲ کم	۱	۰ خیلی کم

شاخص های باجنبه منفی	۱۰ خیلی زیاد	۹	۸	۷ زیاد	۶	۵ متوسط	۴	۳	۲ کم	۱	۰ خیلی کم

ارزش های ۲، ۴، ۶ و ۸ ارزش های واسطه بین دو ارزش دیگر می باشند. ارزش های ۰ و ۱۰ کمتر مورد استفاده قرار می گیرد. این نوع اندازه گیری با سه فرض زیر انجام می شود:

الف- فاصله ی بین ارزش های یکسان است. به طور مثال فاصله ی بین خیلی کم و کم، برابر با فاصله بین زیاد و خیلی زیاد است.

ب- امتیاز ها دارای مقیاس نسبی هستند. به عنوان مثال ۹ سه برابر بیشتر از امتیاز ۳ است.

ج- ترکیب ارزش ها (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم)برای شاخص های مختلف مجاز است.

بر طبق این مقیاس ها، معیار های کمی و کیفی مثال مذکور (کیفیت کار و میزان تجهیزات و امکانات) را می توان کمی کرد.

از این رو ماتریس تصمیم گیری به صورت زیر تعریف خواهد شد:

	C1	C2	C3	C4	C5
A1	۸	۱۲	۹	۷	۲۶۰
A2					
A3					
A4					
A5					

۴-۳-روش های بی مقیاس سازی :

بی مقیاس سازی :

از آنجا که هر یک از شاخص های کمی دارای مقیاس اندازه گیری خاص خود می باشند، این کارمقایسه ی مقادیر با یکدیگر را غیر ممکن می سازد، لذا می بایست به طریقی آنها را مستقل از واحد اندازه گیری کرد تا بتوان مقایسه را انجام داد. برای این کار ۳ روش وجود دارد که به آنها اشاره می کنیم:

۴-۳-۱- بی مقیاس سازی با استفاده از نرم

در این نوع بی مقیاس سازی، هر عنصر ماتریس تصمیم گیری را بر مجذور مجموع مربعات عناصر هر ستون تقسیم می کنیم :

$$n_{ij}=\frac{aij}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} {a_{ij}}^2}}$$

	C_1	C_2	C_3
A_1	۲	۴	۶
A2	۵	۸	۳

n_{ij} مقدار بی مقیاس شده ی گزینه ی i ام از شاخص j ام

۹	۷	۱	A3

است .

مثال :

C= معیار ها و A= تعداد گزینه ها

$$N_{ij}=\frac{2}{\sqrt{2\char`^2+5\char`^2+1\char`^2}}=\frac{2}{5/477}=.18$$

$N_{ij}=\frac{5}{5.477}$ =.۹۱ , $n_{ij}=\frac{1}{5.477}$=.۱۸

و به همین ترتیب برای دو ستون بعدی این کار را انجام داده ، یعنی تک تک اعداد هر ستون را بر مجذور مجموع مربعات آن تقسیم می کنیم. که در نهایت جدول بی مقیاس شده به صورت زیر خواهد بود :

	C_1	C_2	C_3
A_1	.36	.35	.53
A2	.91	.70	.26
A3	.18	.61	.80

۴-۳-۲- روش بی مقیاس سازی خطی :

در این روش ابتدا مقادیر شاخص های منفی را معکوس کرده و سپس هر مقدار از ماتریس را بر حد اکثر آن ستون تقسیم می کنیم . البته چنانچه تمامی شاخص ها دارای جنبه ی منفی باشند، نیازی به محاسبه ی معکوس هر یک از مقادیر نبوده و می توان علاوه بر روش قبل، مقدار هر خانه از ماتریس را به مقدار حداکثر ستون مربوطه تقسیم کرده و حاصل را از یک کم کرد که در حالت کلی خواهیم داشت :

برای شاخص ها با جنبه ی مثبت :

$n_{ij}=\frac{aij}{max\ a_j}$

برای شاخص ها با جنبه ی منفی:

$n_{ij}=\frac{\frac{1}{aij}}{max(\frac{1}{a_j}}$

برای حالتی که تمامی شاخص ها منفی باشند :

$n_{ij}=1-\frac{aij}{max\ a_j}$

	کیفیت	مصرف	زیبایی
پراید	۲	۴	۶
پیکان	۵	۸	۳
پژو	۱	۷	۹

$\frac{7}{8}$

$\frac{a_{ij}}{max\ a_j} = \frac{4}{8}$

$\frac{7}{8}$

همانطور که در بالا مشاهده شد، اعداد بدست آمده بر اساس شاخص های مثبت و منفی محاسبه شدند.

-شکل خطی : در این حالت هر یک از اعداد را بر مجموع اعداد ستون متناظر با خود، تقسیم می کنیم :

$r_{ij} = \frac{rij}{\sum_{i=1}^{n} rij}$

مثال :

	C_1	C_2	C_3
A_1	2	4	6
A2	5	8	3
A3	1	7	9
جمع	۸	۱۹	۱۸

$\frac{2}{8}$

$\frac{4}{19}$

$\frac{6}{19}$

و به همین صورت ، باقی مانده ی اعداد را بهنجار می کنیم:

۴-۳-۳- بی مقیاس کردن فازی :

در صورتیکه فاصله ی بین مقادیر اندازه گیری شده زیاد نباشد، می توان برای بی مقیاس کردن معیار های مثبت و منفی به ترتیب از روابط زیر استفاده کرد :

$r_{ij} = \frac{x_{ij} - \min\{x_{ij}\}}{\max\{x_{ij}\} - \min\{x_j\}}$

$r_{ij} = \frac{\max\{x_{ij}\} - x_{ij}}{\max\{x_{ij}\} - \min\{x_{ij}\}}$

در این روش اعداد ماتریس تصمیم، به اعداد بین صفر و یک تبدیل خواهند شد به گونه ای که بهترین نتیجه عدد یک و بدترین نتیجه به عدد صفر تعلق خواهند گرفت.

۴-۴- روش های ارزیابی اوزان ماتریس ها

هر یک از اوزان بدست آمده باید از طریق یکی از روش های زیر مورد ارزیابی قرار گیرند.

4-4-1-روش آنتروپی

آنتروپی یک مفهوم بسیار با اهمیت در علوم اجتماعی، فیزیک و تئوری اطلاعات می باشد. وقتی که داده های یک ماتریس تصمیم گیری، به طور کامل مشخص شده باشد، می توان از روش آنتروپی، برای ارزیابی وزن ها استفاده کرد. ایده های روش های فوق، این است که هرچه پراکندگی در مقادیر یک شاخص، بیشتر باشد، آن شاخص از اهمیت بیشتری برخوردار است.

آنتروپی در نظریه ی اطلاعات یک معیار عدم اطمینان است که با توزیع احتمال P_i مشخص می شود. اگر ماتریس تصمیم را به شکل زیر نشان دهیم:

$$D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \\ A_i \\ \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_j & X_n \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & & & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \ldots\ldots & & & \ldots\ldots \\ a_{i1} & & a_{ij} & a_{in} \\ \ldots\ldots & & & \ldots\ldots \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{array} \right| \end{array}$$

اندازه گیری این عدم اطمینان(E_i)، توسط شانون ، به صورت زیر بیان شده است:

$$E_j = -k.\sum_{i=1}^{m} P_{ij}.Ln(P_{ij})$$

$$P_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}$$

که k مقداری ثابت است و به منظور اینکه E_i بین صفر و یک باشد، اعمال می شود.

E از توزیع احتمال P_i بر اساس مکانیزم آماری، محاسبه شده و مقدار آن در صورت تساوی P_iها با یکدیگر(یعنی $P_i=\frac{1}{n}$) بدست می آید.

k به عنوان مقدار ثابت، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$K=\frac{1}{Ln(m)}$$

عدم اطمینان یا درجه ی انحراف (d_j) از اطلاعات بدست آمده برای شاخص j ، بیان می کند که شاخص مربوطه(j) چه میزان اطلاعات مفید برای تصمیم گیری، در اختیار تصمیم گیرنده قرار می دهد. مقدار (d_j) به صورت زیر بدست می آید:

$$D_j=1-E_j \;؛ \forall_j$$

سپس مقدار وزن w_jبه صورت زیر بدست می آید:

$$W_j=\frac{di}{\sum_{j=1}^{n} dj} \qquad ؛ \qquad \forall_j$$

اگر تصمیم گیرنده از قبل، وزن دهی مشخصی مثل λ_j را برای شاخص j در نظر گرفته باشد، در این صورت وزن تعدیل شده (W^-_j)، به شرح زیر محاسبه می شود:

$$W^-_j =\frac{\lambda j\, wj}{\sum_{j=1}^{n} \lambda j\, wj} \qquad ؛ \qquad \forall_j$$

مثال : در جدول زیر سه تامین کننده ی s1,s2 و s3 رابايد نسبت به ۳ معيار , c1 , c2 و c3 رتبه بندی کنیم .

	c1	c2	c3

s1	7000	2	0.05
s2	6800	4	0.03
s3	7200	3	0.01
جمع	21000	9	0.09

تعداد گزینه ها=m

K=.910

در مرحله بعد باید با یکی از روش های بهنجار نمودن، جدول را بهنجار کنیم . در جدول زیر برای این کار تک تک اعداد هر ستون را بر مجموع آن ستون تقسیم می کنیم که در این صورت خواهیم داشت :

جدول بهنجار شده:

	c1	c2	c3
s1	0.333333	0.222222	0.555556
s2	0.32381	0.444444	0.333333
s3	0.342857	0.333333	0.111111

در مرحله بعد باید آنتروپی شاخص ها رابدست آوریم یا همان (E) :

E1	E2	E3
0.999752	0.965634	0.852792

برای مثال :

E1= - .910*(.333*-1/09)+(.323*-1/12)+(.332*-1/07)=.999752

در این مرحله باید درجه ی اطمینان را بدست آوریم که :

d1	d2	d3	مجموع
0.000248	0.034366	0.147208	0.181822

برای مثال :

D1= 1- (.999752) = .0000248

D1=1- .965634 = .034366

در نهایت، پس از بدست آوردن درجه ی اطمینان، اقدام به بدست آوردن اوزان می کنیم که برای این کار باید تک تک d ها را بر مجموع آن تقسیم کنیم که در این صورت خواهیم داشت :

w1	w2	w3
0.001362	0.189012	0.809626

W1=.000248 / .181822 = .001362

W2= .034366 / .181822=.189012

W3=.147208 / .181822 = .809626

2-4-4-روش فرآیند تحلیل شبکه ای (AHP):

بطور کلی می توان فرایند MADMرا در پنج گام زیر خلاصه کرد (دوبیوس و پرید، ۱۹۸۰):

گام اول : تعریف و تبیین ماهیت مساله

گام دوم: ایجاد یک نظام سلسله مراتبی برای ارزیابی آن (شکل ۱-۲)

گام سوم : انتخاب الگوی ارزیابی مناسب

گام چهام : بدست آوردن وزن و ارزش نسبی هر بعد از مساله

گام پنجم: تعیین بهترین انتخاب با توجه به ارزش مطلوبیت جزیی که خود دربرگیرنده ارزش کلی وزن نسبی و ارزش عملکرد مربوط به هر یک از انتخابهاست.

اگر ارزش نهایی انتخاب ها فازی باشد ، آنگاه گام ششم برای رتبه بندی گزینه ها به منظور انتخاب بهترین گزینه برداشته می شود.

گام ششم : رتبه بندی گزینه ها براساس ارزش مطلوبیت فازی جزیی که از گام پنجم بدست آمد.

شایان ذکر است که کینی و رایفا (۱۹۷۶) عنوان داشتند که پنج اصل زیر باید برای طرح معیارهای تصمیم گیری لحاظ شود :

جامعیت

قابلیت اجرایی

تجزیه پذیری

عدم تکرار

حداقل اندازه

یکی از روش های تصمیم گیری چند شاخصه، روش فرآیند تحلیل سلسله مراتبی[1]می باشد.AHP توسط ساعتی (۱۹۸۰ و ۱۹۷۷) ارائه گردید تا فرآیند تصمیم گیری غیرعینی را براساس ابعاد مختلف در یک نظام سلسله مراتبی الگوسازی کند. از آن پس این روش بطور گسترده ای در برنامه ریزی یکپارچه ، گزینش نمونه کار و تحلیل سود و هزینه در دستگاههای دولتی بکار بسته می شود تا منابع به درستی اختصاص یابد. یکی از کارآمدترین تکنیک های تصمیم گیری، فرایند تحلیل سلسله مراتبی است که اولین بار توسط توماس ال ساعتی در ۱۹۸۰ مطرح شد . که بر اساس مقایسه های زوجی بنا نهاده شده و امکان بررسی سناریوهای مختلف را به مدیران می دهد .

اصول فرایند تحلیل سلسله مراتبی

۱. اصل شرط معکوسی [۲]

۲. اصل همگنی [۳]

۳. اصل وابستگی[۴]

۴. اصل انتظارات[5]

شرط معکوسی:

اگرترجیح عنصر A بر عنصر B برابر n باشد ترجیح عنصر B بر عنصر A برابر $۱/n$خواهد بود.

همگنی:

عنصر A با عنصر B باید همگن و قابل قیاس باشند . به بیان دیگر برتری عنصر Aبر عنصر Bنمی تواند بی نهایت یا صفر باشد.

---

[1]Analytical Hierarchy process (AHP)

[2]Reciprocal Condition

[3]Homogeneity

[4]Dependency

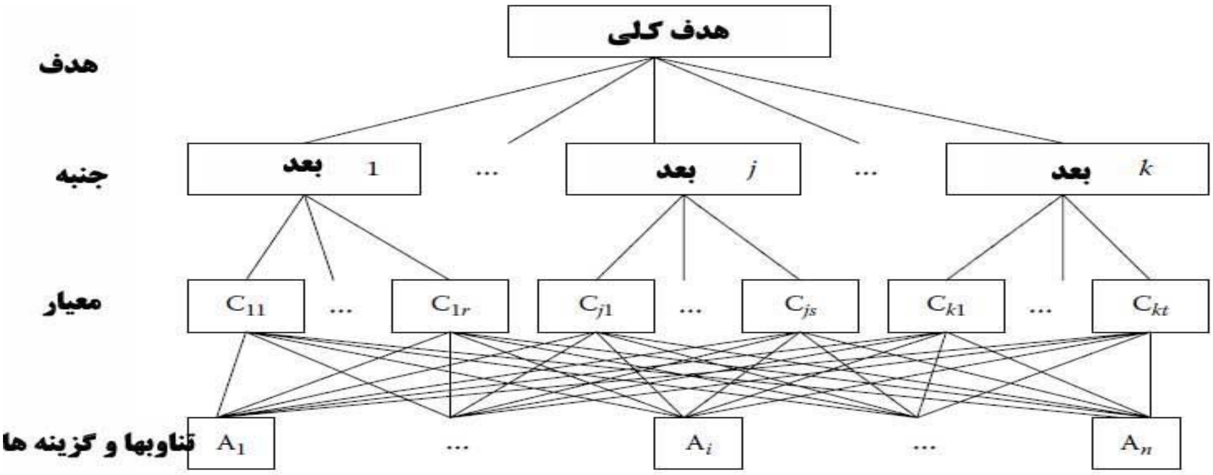
[5]Expectation

وابستگی:

هر عنصر سلسله مراتبی به عنصر سطح بالاتر خود می تواند وابسته باشد وبه صورت خطی این وابستگی تا بالاترین سطح می تواند ادامه داشته باشد.

انتظارات:

هر گاه تغییر در ساختمان سلسله مراتبی رخ دهد، پروسه ارزیابی باید مجددا انجام گیرد.

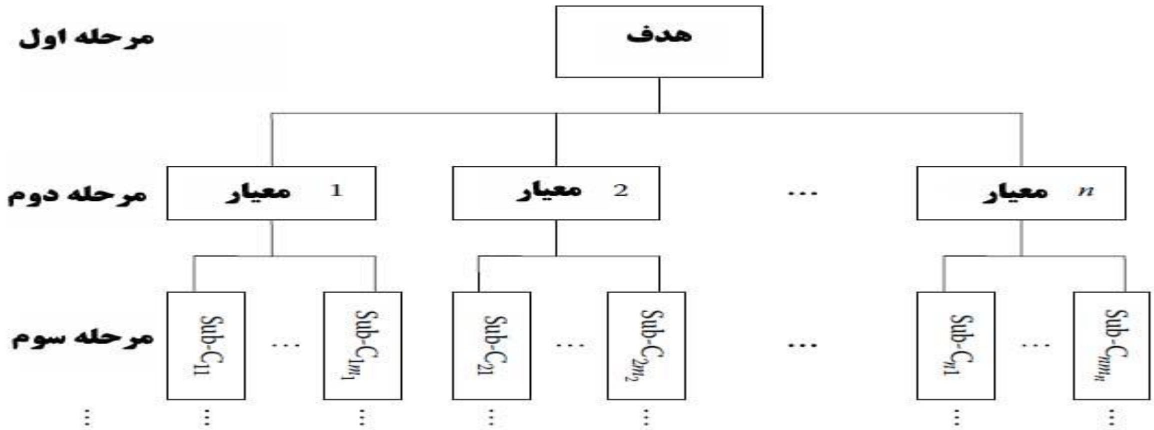


شکل ۴-۱. سیستم سلسله مراتبی برای MADM

باید تاکید داشت که تمام مسائل تصمیم گیری در AHP به عنوان یک ساختار سلسله مراتبی مطرح می شوند. اولین سطح آن مبین هدف یک مساله ی تصمیم گیری خاص است. در سطح دوم، هدف به معیارهای متعددی تجزیه می شود و به همین ترتیب سطوح پایین تر از این اصل پیروی می کنند تا هر معیار را به معیارهای خردتر تقسیم کنند. بنابراین شکل کلی AHP را می توان آنطور که در شکل ۴-۲ آمده است ترسیم نمود.

چهار گام اصلی AHP را می توان به شکل زیر خلاصه نمود :

گام اول: ایجاد یک نظام سلسله مراتبی به واسطه ی تجزیه ی یک مساله به سلسله مراتبی از عناصر بهم مرتبط.



شکل ۴-۲. ساختار تناوبی AHP

گام دوم: مقایسه وزن نسبی بین ابعاد عناصر تصمیم گیری برای ایجاد یک ماتریس متقابل

گام سوم: ترکیب قضاوت شخصی با تخمین های ارایه شده از وزن نسبی

گام چهارم: تجمع اوزان نسبی عناصر برای تعیین بهترین گزینه یا راهبرد

اگر بخواهیم مجموعه ای از n بعد را دو به دو، براساس وزن اهمیت نسبی شان مقایسه کنیم، بصورتی که ابعاد با $a_1, a_2, \ldots$, a_n و اوزان با $w_1, w_2, \ldots, w_n$ نشان داده شده باشند، آنگاه می توان مقایسه های دو به دو را بصورت پرسشنامه ای با برداشت غیرعینی بصورت زیر ارائه داد.

فرمول (۴-۱)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

که $a_{ij}=\frac{1}{a_{ij}}$(متقابل مثبت) $a_{ij}=\frac{a_{ik}}{a_{jk}}$ توجه کنید که در شرایط واقعی $\frac{w_i}{w_j}$معمولاً نامعلوم است . بنابراین مساله اصلی در AHP یافتن a_{ij} است بطوریکه $a_{ij}\cong\frac{w_i}{w_j}$. یک ماتریس وزنی بصورت زیر طرح می شود :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} w_1 & \cdots & w_j & \cdots & w_n \end{array} \\ \mathbf{W} = \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{array} & \begin{bmatrix} w_1/w_1 & \cdots & w_1/w_j & \cdots & w_1/w_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_i/w_1 & \cdots & w_i/w_j & \cdots & w_i/w_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & \cdots & w_n/w_j & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix}. \end{array}$$

با ضرب W×w خواهیم داشت:

$$W \times w = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} w_1 & \cdots & w_j & \cdots & w_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} w_1/w_1 & \cdots & w_1/w_j & \cdots & w_1/w_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_i/w_1 & \cdots & w_i/w_j & \cdots & w_i/w_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & \cdots & w_n/w_j & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

یا $(W-nI)\times w=0$ $A=[a_{ij}]$

جدول زیر، مقیاس نسبی که برای مقایسه وزن اهمیت بین معیارها بکار می رود را نشان می دهد که مطابق با معنای واژگان از یک تا نُه مرتب شده است، تا مبین اهمیت برابر یا مفرط باشد.

معیار نسبی در AHP		
شرح	متغیر های زبانی	شدت
دو عنصر اهمیت یکسانی داشته باشند	مساوی	۱
یک عنصر نسبت به عنصر دیگر، نسبتاً ترجیح داده می شود	متوسط	۳
یک عنصر نسبت به عنصر دیگر،زیاد ترجیح داده می شود	قوی	۵
یک عنصر نسبت به عنصر دیگر، بسیار زیاد ترجیح داده می شود	بیان شده	۷
یک عنصر نسبت به عنصر دیگر، ترجیح فوق العاده زیادی ترجیح داده می شود	نهایت	۹
	ارزشهای بنابین در قضاوت	۲و۴و۶و۸

۴-۵- ماتریس سازگار و خصوصیات آن

اگر n معیار به شرح $C_1 , C_2 , \ldots , C_n$ داشته باشیم و ماتریس مقایسه زوجی آنها به صورت زیر باشد :

$$A= [a_{ij}] \qquad i,j = 1 , 2 , \ldots , n$$

که در آن a_{ij} ترجیح عنصر C_i را C_j بر نشان می دهد . چنانچه در این ماتریس داشته باشیم :

$$i,j,k= 1,2,\ldots,n \quad a_{ik} \times a_{kj} = a_{ij}$$

آنگاه می گوییم ماتریس A سازگار است .

هر ماتریس سازگار دارای خصوصیات زیر است :

۱. مقدار وزن عناصر برابر مقدار بهنجار هر عنصر، می باشد.

۲. مقدار ویژه برابر طول ماتریس است(AW=nW) .

۳. مقدار ناسازگاری دراین ماتریس صفر است .

۴-۶- ماتریس ناسازگار و خصوصیات آن :

قضیه یک: اگر $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس مقایسه زوجی A باشد مجموع مقادیر آنها برابر n است :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$$

قضیه دو: بزرگترین مقدار ویژه λ_{max} همواره بزرگتر یا مساوی n است (در این صورت برخی ازλها منفی خواهند بود).

$$\lambda_{max} \geq n$$

قضیه سه: اگر عناصر ماتریس، مقدار کمی از حالت سازگاری فاصله بگیرد ، مقدار ویژه ی آن نیز، مقدار کمی از حالت سازگاری خود فاصله خواهد گرفت .

$$A\times W = \lambda . W$$

که در آن W و λ به ترتیب بردار ویژه و مقدار ویژه ماتریس A می باشد. یک مقدار ویژه برابر n بوده (بزرگترین مقدار ویژه) و بقیه آنها برابر صفر هستند. بنابراین در این حالت می توان نوشت:

$$AW = nW$$

در حالتی که ماتریس مقایسه زوجی A ناسازگار باشد طبق قضیه ۳، λ_{max} کمی از n فاصله می گیرد که می توان نو شت :

$$A\times W = \lambda_{max}.W$$

$$\lambda_{max} - n$$

علاوه بر آن، برای تضمین ثبات، برداشت غیرعینی و دقت اوزان نسبی دو شاخص که شامل شاخص ثبات (CI) و نسبت ثبات (CR) می شود، را ارائه می دهیم.

معادله شاخص ناسازگاری CI را می توان به صورت زیر نوشت :

$$C.I = \frac{(\lambda_{max} - n)}{(n-1)}$$

که λ_{max} بزرگترین مقدار ویژه و n مقدار ابعاد است. ساعتی (۱۹۸۰) پیشنهاد داد که مقدار CI نباید از ۰/۱ بیشتر باشد در غیراین صورت نتیجه بدست آمده متقن نیست. از سوی دیگر CR به صورت زیر محاسبه می شود :

$$C.R = \frac{C.I}{R.I}$$

که RI به شاخص ثبات تصادفی اشاره دارد که از نمونه ی بزرگی از ماتریس های متقابل بصورت تصادفی با استفاده از مقیاس $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{8}$و ... و ۸ و ۹ بدست می آید. RIبا توجه به اندازه ماتریس های مختلف در جدول زیر نشان داده شده است.

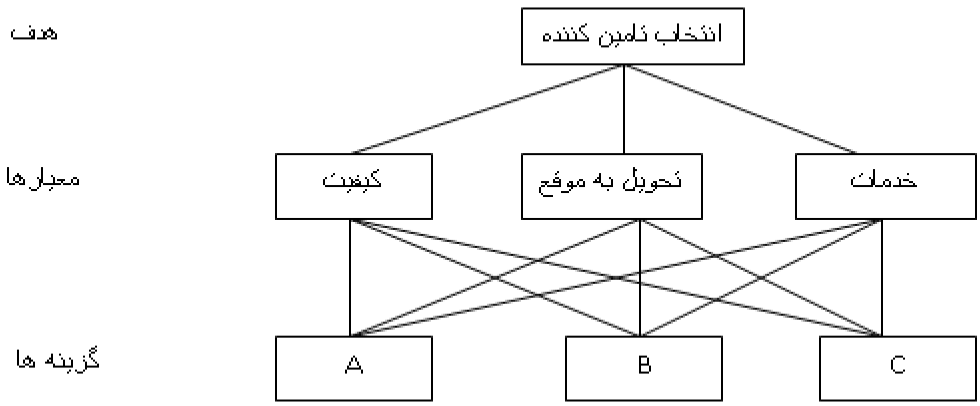
R.I برای ماتریسهای سایزهای متفاوت	
تعداد عناصر	RI

۰,۵۲	۳
۰,۸۹	۴
۱,۱۱	۵
۱,۲۵	۶
۱,۳۵	۷
۱,۴۰	۸
۱,۴۵	۹
۱,۴۹	۱۰
۱,۵۱	۱۱
۱,۵۴	۱۲
۱,۵۶	۱۳

برای پایابودن نتایج، CR باید کمتر از ۰/۱ باشد و ۰/۲ حداکثر سطح قابل تحمل است. در ادامه یک مثال عددی برای نشان دادن روش AHP ارائه می دهیم:

مثال: مدیری می خواهد برای انتخاب تامین کننده شرکت خود از میان سه تامین کننده A و B و C یکی را انتخاب کند و برای این انتخاب سه معیار خدمات ، تحویل به موقع و کیفیت، مد نظر این مدیر می باشد. حل این مثال به شرح زیر می باشد:

سلسله مراتب تصمیم برای این مثال به شکل زیر می باشد:



برای محاسبه تعداد مقایسات زوجی برای شاخص های انجام شده، می توان از روش زیر استفاده کرد :

تعداد مقایسات زوجی= $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

تعداد مقایسات زوجی شاخص‌ها= $\binom{3}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = 3$

در نتیجه تعداد مقایسات زوجی برای شاخص های این مثال ۳ می باشد.

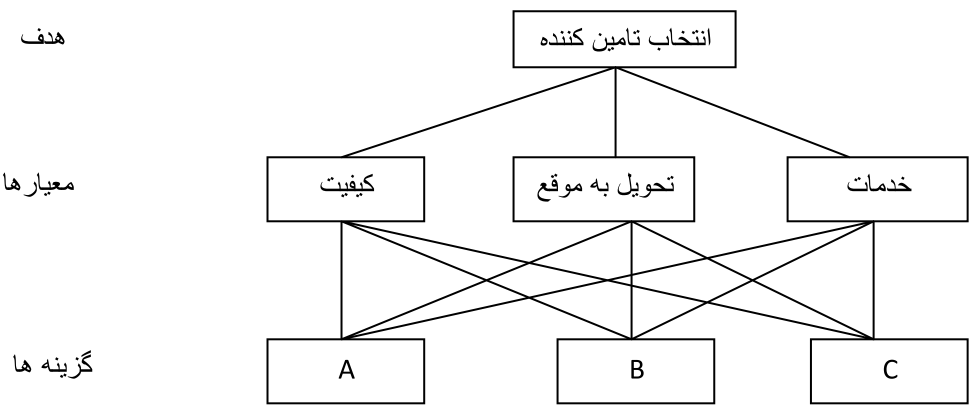
در مرحله ی بعدی تصمیم گیرنده شاخص ها را با هم مقایسه می کند، به طور مثال از نظر تصمیم گیرنده شاخص کیفیت به شاخص قیمت، ترجیح نسبتا کمی دارد. حاصل مقایسه ی شاخص ها نسبت به یکدیگر درجدول زیر آورده شده است.

شاخص ها	خدمات	تحویل به موقع	کیفیت
خدمات	۱	۳	$\frac{1}{5}$
تحویل به موقع	$\frac{1}{3}$	۱	$\frac{1}{6}$
کیفیت	۵	۶	۱
جمع	۶,۳۳	۱۰	۱,۳۳۶۶

نکته ۱ : قطر ماتریس ، یک است ؛ زیرا هر شاخص ، با خودش مقایسه می شود .

نکته ۲ : چون شاخص خدمات از تحویل به موقع ارجح تر است و از طرفی شاخص کیفیت از خدمات ارجح تر است پس در نهایت شاخص کیفیت از شاخص تحویل به موقع ارجحتر است.

نکته ۳: اگر یک شاخص نسبت به شاخص های دیگر اهمیت یکسان داسته باسد. پس آن دو شاخص نسبت به هم ارزشی برابر دارند.



در مرحله بعدی پس از تشکیل ماتریس مقایسات زوجی برای شاخص‌ها ، مقادیر آن را بی مقیاس می کنیم. برای بی مقیاس کردن همانطور که گفته شد، هر مقدار ماتریس را بر جمع هر ستون تقسیم می کنیم، در نهایت ماتریس ما به شکل زیر در می آید :

شاخص ها	خدمات	تحویل به موقع	کیفیت
خدمات	۰,۱۵۷	۰,۳	۰,۱۴۶
تحویل به موقع	۰,۰۵۲	۰,۱	۰,۱۲۱

کیفیت	۰,۷۸۹	۰,۶	۰,۷۳۱

در گام بعدی برای محاسبه ی وزن نسبی هر شاخص، میانگین حسابی هر سطر را باید محاسبه کنیم. یعنی جمع هر سطر را حساب و تقسیم بر تعداد شاخص سطر کنیم . در واقع یک ستون به جدول بالا اضافه شده و مقدار میانگین نوشته می شود .

در این مثال، به این شکل می باشد:

شاخص ها	خدمات	تحویل به موقع	کیفیت	میانگین
خدمات	۰,۱۵۷	۰,۳	۰,۱۴۶	۰,۲۰۱
تحویل به موقع	۰,۰۵۲	۰,۱	۰,۱۲۱	۰,۰۹۱
کیفیت	۰,۷۸۹	۰,۶	۰,۷۳۱	۰,۷۰۷

در نتیجه، وزن هر شاخص محاسبه شده و بدین ترتیب وزن شاخص خدمات برابر با ۰,۲۰۱ است و شاخص تحویل به موقع برابر با ۰,۰۹۱ و شاخص کیفیت برابر با ۰,۷۰۷می باشد.

حال همین مراحل را برای سه تامین کننده A و B و C از نظر هر شاخص انجام می دهیم.

خدمات	A	B	C
A	۱	۲	۳
B	$\frac{1}{2}$	۱	۲
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	۱

از نظر تحویل به موقع :

تحویل به موقع	A	B	C
A	۱	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
B	۳	۱	$\frac{1}{2}$
C	۴	۲	۱

از نظر کیفیت :

کیفیت	A	B	C
A	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

B	۲	۱	$\frac{1}{3}$
C	۵	۳	۱

حال وزن نسبی شاخص ها را محاسبه می کنیم :

خدمات	A	B	C	میانگین
A	۰,۵۴۶	۰,۵۷۱	۰,۵۰۰	۰,۵۳۹
B	۰,۲۷۳	۰,۲۸۶	۰,۳۳۳	۰,۲۹۷
C	۰,۱۸۲	۰,۱۴۳	۰,۱۶۷	۰,۱۶۴

تحویل به موقع	A	B	C	میانگین
A	۰,۱۲۵	۰,۱۰۰	۰,۱۴۳	۰,۱۲۳
B	۰,۳۷۵	۰,۳۰۰	۰,۲۸۶	۰,۳۲۰
C	۰,۵۰۰	۰,۶۰۰	۰,۵۷۱	۰,۵۵۷

کیفیت	A	B	C	میانگین
A	۰,۱۲۵	۰,۱۱	۰,۱۳۰	۰,۱۲۲
B	۰,۲۵۰	۰,۲۲۲	۰,۲۱۷	۰,۲۳۰
C	۰,۶۲۵	۰,۶۶۷	۰,۶۵۴	۰,۶۴۸

حال وزن نسبی شاخص ها را در ماتریس وزن نسبی گزینه ها با توجه به هر شاخص ضرب کرده و طبق آن گزینه‌ها را رتبه بندی می کنیم. بنابراین داریم :

	خدمات	تحویل به موقع	کیفیت
A	۰,۵۳۹	۰,۱۲۳	۰,۱۲۲
B	۰,۲۹۷	۰,۳۲۰	۰,۲۳۰

C	۰,۱۶۴	۰,۵۵۷	۰,۶۴۸

A
B
C

$$\begin{Bmatrix} 0.205 \\ 0.251 \\ 0.541 \end{Bmatrix}$$

شاخص ها	خدمات	تحویل به موقع	کیفیت
خدمات	۱	۳	$\frac{1}{5}$
تحویل به موقع	$\frac{1}{3}$	۱	$\frac{1}{6}$
کیفیت	۵	۶	۱

$$\times \begin{Bmatrix} 0.201 \\ 0.091 \\ 0.707 \end{Bmatrix} =$$

بنا براین رتبه بنده گزینه ها به صورت زیر می باشد:

C ‹ B ‹ A

در این مرحله باید نرخ ناسازگاری محاسبه شود، تا مشخص شود که آیا بین مقایسات زوجی ما سازگاری وجود دارد یا خیر.

در گام اول ماتریس مقایسات زوجی شاخص‌ها را در بردار وزن‌های نسبی به‌دست آمده از آن ضرب می کنیم.

$$\times \begin{Bmatrix} 0.201 \\ 0.091 \\ 0.707 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.617 \\ 0.276 \\ 2.263 \end{Bmatrix}$$

در گام دوم، جواب حاصل را بر بردار وزن‌های نسبی شاخص‌ها تقسیم می کنیم تا بردار سازگاری به دست آید:

$$\begin{Bmatrix} \frac{0.617}{0.201} \\ \frac{0.276}{0.091} \\ \frac{2.326}{0.707} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.065 \\ 3.021 \\ 3.200 \end{Bmatrix}$$

در گام سوم، میانگین حسابی عناصر این بردار را بدست می آوریم که λ_{max}نامیده می شود :

λ_{max} = (3.065 + 3.021 + 3.200) / 3 = 3.095

در مرحله ی بعد شاخص ناسازگاری را به صورت زیر حساب می کنیم :

$$C.I = \frac{(\lambda \max - n)}{(n-1)} = \frac{3.095-3}{3-1} = 0.047$$

۳-۴-۴-روش لینمپ (LINMAP):

اگر X_{ij} ، مقداری باشد که در ماتریس تصمیم گیری، گزینه ی i ام در شاخص j ام اخذ می نماید و X_j جواب بهینه ی مدل باشد که در نهایت پس از حل مدل مناسب ترین مقادیر شاخص های $X_1, X_2, \ldots, X_n$، را بیان می کند و W_J، وزن و اهمیت هر یک از شاخص ها به ازای $J=1,2,\ldots,n$ باشد.

فاصله ی هر گزینه از گزینه ی بهینه، معیار قرار می گیرد که این فاصله را با نماد d_i نمایش می دهیم ، که از رابطه ی زیر قابل محاسبه می باشد:

$$d_i = [\sum_{j=1}^{n} w_j (x_{ij} - x^*_j)^2]^{1/2}$$

$$q_L = d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} w_j (x_{ij} - x_j^*)^2$$

حال اگر مجموعه نظرات تصمیم گیرنده با s به صورت (K,L) نشان داده شود یعنی گزینه ی k بر گزینه ی L ارجح است و در واقع:

$$q_k \leq q_L$$

دز نتیجه دوحالت زیر حاصل می شود :

حالت(I) :

۱) اگر$q_k \leq q_l$ باشد، انحراف به وجود می آید که مقدار این انحراف از رابطه ی زیر محاسبه می شود :

$$(Q_l - q_k) = 0 \qquad q_k - q_l$$

$$Q_k - q_l \qquad q_k - q_l$$

یا به عبارت دیگر :

$$(q_l - q_k) = \max[0, (q_k - q_l)]$$

که برای سادگی، این مقدار انحراف را با $Z_{k,l}$ نمایش می دهیم و مجموع این انحرافات و عدم برازش ها از رابطه ی زیر محاسبه می گردد:

$$P = \sum_s (q_l - q_k)^- = \sum_s z_{k,l}$$

حالت۲)

اگر $q_k \leq q_L$ باشد :

$$(q_l - q_k)^+ = 0 \qquad q_k \leq q_l$$

$$q_k - q_l \qquad q_k \geq q_l$$

که در رابطه بالا $(q_l - q_k)^+$ بیانگر خوبی برازش می باشد و مجموع این مقادیر از رابطه ی زیر محاسبه می گردد:

$$G = \sum_s (q_1 - q_k)^+$$

اکنون با توجه به حالات یک و دو ، مقدار w_i به گونه ای انتخاب می شود که $G \geq P$ باشد و یا :

$$G - P \geq 0$$

به طور اختیاری $G - P$ را مساوی یک در نظر می گیریم.

لذا برای پیدا کردن مناسب ترین گزینه، باید مجموعه انحرافات را به گونه ای حداقل نمود که رابطه ی زیر برقرار باشد، در این صورت خواهیم داشت :

$$\min\sum_{s}(q_l - q_k)^{-} = \sum_{s} max\,\{0,(q_l - q_k)\} = \sum_{s} z_{k,l}$$

$$\text{s.t} = z(q_l - q_k) = 1$$

$$(k,1)\in s$$

چون تابع هدف از نوع مینیمم می باشد ، می توان نوشت :

$$\min\sum_{s} z_{k,l}$$

s.t:

$$Z_{k,l} \geq q_k - q_l$$

$$Q_1 -$$

$$q_k = \sum_{j=1}^{n} w_j(x_{ij} - x_j^*)^2 - (\sum_{j=1}^{n} w_j(x_{kj} - x_j^*)^2 = (\sum_{j=1}^{n} w_j(x_{lj}^2 - x_{kj}^2)^2 - 2\sum_{j=1}^{n} w_j x_j^*(x_{lj} - x_{kj}$$

که چون x_j^*یک ثابت معلوم است قرار می دهیم $x_{j=v_j}^*$، w_j بنابراین داریم :

$$\sum_{j=1}^{n} w_j(x_{lj} - x_j^*)^2 - 2\sum_{j=1}^{n} v_j(x_{lj} - x_{lj}) + z_{k,l} \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{s} w_j(x_{lj}^2 - x_j^*)^2 - 2\sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{j=1}^{n}(x_{lj} - x_{kj}) = 1$$

$$w_j \geq 1 \quad j=1,2,\ldots, m$$

$$v_j:$$

$$z_{k,l} \geq 0$$

$$(k,1)\in s$$

که جواب بهینه ی این مدل برنامه ریزی خطی بیانگر اوزان و اهمیت شاخص ها نسبت به یکدیگر، x_j^* می باشد.

۴-۷- روش تاپسیس

در روش شباهت، گزینه ی ایده آل توسط یون و هانگ در سال۱۹۸۱ ارائه شده که مورد استقبال محققین و کاربران مختلف واقع شد. در این روش، گزینه ها بر اساس شباهت به حل ایده آل رتبه بندی می شوند، به طوری که هرچه یک گزینه شبیه تر به حل ایده آل باشد، رتبه ی بیشتری دارد. این تصمیم گیری از پشتوانه ی ریاضی قوی برخوردار است و همانند بسیاری از روش های علمی، دانستن و رعایت مفروضات، محدوده و شرایط اعتبار قوانین و صحت فرمول های پیشنهادی، محدوده ی دقت نتایج و شرایط قابل قبول بودن جواب بسیار حائز اهمیت است.

در تعریف این روش، از دو مفهوم حل ایده آل و شباهت به حل ایده آل استفاده شده است. حل ایده آل چنان که از اسم آن پیداست، راه حلی است که از هر جهت بهترین باشد که عموما در عمل وجود نداشته و سعی بر آن است که به آن نزدیک شویم. به منظور اندازه گیری شباهت یک طرح(یا گزینه) به حل ایده آل و حل نامناسب، فاصله ی آن طرح (یا گزینه) از حل ایده آل و حل نامناسب آن اندازه گیری می شود. سپس گزینه ها، بر اساس نسبت فاصله از حل نامناسب و ایده آل ارزیابی و رتبه بندی می شوند.

مفروضات زیر بنایی این روش عبارتند از:

الف: مطلوبیت هر معیار باید به طور یکنواخت، افزاینده و یا کاهنده باشد. معیارها باید به طور یکنواخت کاهنده و یا افزاینده باشند تا بتوان بهترین ارزش موجود آن را، ایده آل و بدترین ارزش آن را، نامناسب تلقی کرد.

ب : معیار ها باید به گونه ای طرح شوند که مستقل از همدیگر باشند.

ج :از آنجایی که نرخ تبادل بین معیارها معمولا مقداری غیر از واحد است، فاصله گزینه ها از حل ایده آل و نامناسب به صورت فاصله اقلیدسی محاسبه کرد.

مراحل روش شباهت به حل ایده آل:

اگر در یک مسئله تصمیم گیری چند معیاره، n معیار و m گزینه وجود داشته باشد، به منظور انتخاب بهترین گزینه با استفاده از روش شباهت به حل ایده آل، مراحل روش به شرح زیر می باشد :

قدم اول- تبدیل ماتریس تصمیم گیری موجود به یک ماتریس ((بی مقیاس شده)) با استفاده از فرمول :

$$n_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} r_{ij}^{2}}}$$

قدم دوم- ایجاد ماتریس ((بی مقیاس)) وزین با مفروض بودن بردار W به عنوان ورودی به الگوریتم . یعنی:

$$W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$$

$$V = N_D . W_{n*n} = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{1j} & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & v_{2j} & v_{2n} \\ v_{m1} & v_{m2} & v_{mj} & v_{mn} \end{vmatrix}$$

به طوری که ND ماتریسی است که امتیازات شاخص ها در آن ((بی مقیاس)) و قابل مقایسه شده است و Wn*n ماتریسی است قطری، که فقط عناصر قطر اصلی آن غیر صفر خواهد بود.

قدم سوم- مشخص نمودن راه حل ایده آل + مثبت و راه حل ایده آل- منفی. برای گزینه ایده آل + (A+) و ایده ال – منفی (A-) تعریف کنیم :

$$d_{i+} = \{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^{+})^2\}^{0.5}; i = 1, 2, ..., m$$

$$d_{i-} = \{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^{-})^2\}^{0.5}; i = 1, 2, ..., m$$

$$cl_{i+} = \frac{d_{i-}}{(d_{i+} + d_{i-})}; 0 \le cl_{i+} \le 1; i = 1, 2, ..., m$$

قدم پنجم- محاسبه نزدیکی نسبی Ai به راه حل ایده آل. این نزدیکی نسبی را به صورت زیر تعریف می کنیم :

ملاحظه می شود که چنانچه $Ai=A+$ گردد آنگاه $di+=0$ بوده و خواهیم داشت : $cli+=1$ و در صورتی که $Ai=A-$ شود آن گاه $di-=0$ بوده و $cli+=0$ خواهد شد. بنابراین هر اندازه گزینه Ai به راه حل ایده آل($A+$) نزدیکتر باشد، ارزش $cli+$ به واحد نزدیکتر خواهد بود.

قدم ششم– رتبه بندی گزینه ها، بر اساس ترتیب نزولی $cli+$ می توان گزینه های موجود از مساله ی مفروض را رتبه بندی نمود.

مثال: شرکت آلفا برای احداث پروژه نیروگاه سه معیار قیمت، نزدیکی به شهر و اثرات زیست محیطی را مدنظر دارد و برای این سه ویژگی سه مکان را شناسایی کرده است با روش تاپسیس بهترین گزینه برای احداث این پروژه را تعیین کنید.

	قیمت	نزدیکی به شهر	اثرات زیست محیطی
P_1	200	10	2
P_2	500	5	3
P_3	100	20	1

	قیمت	نزدیکی به شهر	اثرات زیست محیطی
قیمت	۱	۵	۷
نزدیکی به شهر	$\frac{1}{5}$	۱	۳
اثرات زیست محیطی	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	۱

توجه شود هر گزینه ای که نمره ی اثرات زیست محیطی آن بیشتر باشد، بهتر است.

حل:

در مرحله اول باید از روش AHP وزن معیار ها را بدست آوریم:

	قیمت	نزدیکی به شهر	اثرات زیست محیطی
قیمت	۱	۵	۷
نزدیکی به شهر	$\frac{1}{5}$	۱	۳
اثرات زیست محیطی	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	۱
جمع	۱,۳۴۲	۶,۳۳۳	۱۱

در این بخش نرم خطی را باید از فرمول زیر بدست آوریم :

$$N=\frac{\text{عدد هر ستون}}{\text{جمع هر ستون}}$$

	قیمت	نزدیکی به شهر	اثرات زیست محیطی	W

قیمت	۰,۷۴۴	۰,۷۸۹	۰,۶۳۶	0.723
نزدیکی به شهر	0.148	۰,۱۵۷	۰,۲۷۲	0.193
اثرات زیست محیطی	0.106	0.526	۰,۰۹۹	0.083

پس از پر کردن جدول بالا با فرمول نرم خطی، باید از روش زیر وزن هر معیار را بدست آوریم :

$$W=\frac{\text{مجموع هر سطر}}{\text{تعداد معیار ها}}$$

$$W=\begin{bmatrix} 0.723 & 0 & 0 \\ 0 & 0.193 & 0 \\ 0 & 0 & 0.083 \end{bmatrix}$$

پس از بدست آوردن وزن ها از طریق AHP به روش تاپسیس به ادامه ی حل مسئله می پردازیم :

در مرحله ی اول در روش تاپسیس، با استفاده از رابطه ی زیر باید ماتریس اولیه را بی مقیاس کنیم:

$$n_{ij}=\frac{r_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} r_{ij}^2}}$$

	قیمت	نزدیکی به شهر	اثرات زیست محیطی
P_1	200	10	2
P_2	500	5	3
P_3	100	20	1
$\sqrt{\sum_{i=1}^{3} r_{ij}^2}$	۵۴۷,۷۲۲	۲۲,۹۱۲	۳,۷۴۱

$$N=\begin{vmatrix} 0.365 & 0.436 & 0.534 \\ 0.912 & 0.218 & 0.801 \\ 0.182 & 0.872 & 0.267 \end{vmatrix}$$

مرحله دوم : برای ماتریس V داریم :

$$V= N \times W = = \begin{vmatrix} 0.264 & 0.084 & 0.044 \\ 0.660 & 0.042 & 0.066 \\ 0.132 & 0.168 & 0.022 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.723 & 0 & 0 \\ 0 & 0.193 & 0 \\ 0 & 0 & 0.083 \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.365 & 0.436 & 0.534 \\ 0.912 & 0.218 & 0.801 \\ 0.182 & 0.872 & 0.267 \end{vmatrix}$$

مرحله سوم : باید راه حل های ایده آل مثبت و منفی را تعیین نماییم :

برای انتخاب شاخص ایده آل مثبت، شاخصی که بهترین حالت را دارد، انتخاب می شود. برای مثال، برای معیار قیمت و نزدیکی به شهر، آن شاخصی که کمترین مقدار را به خود تخصیص داده را انتخاب می کنیم، زیرا در این معیارها، هرچه مقدار کمتر باشد بهتر است و برای اثرات زیست محیطی، همانطور که سوال گفته است هرچه این مقدار بیشتر باشد بهتر است. پس با این توصیف ها داریم :

$A^{+} = \{\min V_{i1}, \min V_{i2}, \max V_{i3}\} = \{0.132, 0.042, 0.066\}$

برای ایده آل منفی شرایط بر عکس ایده آل مثبت است :

$A^{-} = \{\max V_{i1}, \max V_{i2}, \min V_{i3}\} = \{0.660, 0.168, 0.022\}$

مرحله چهارم : محاسبه فواصل از ایده آل مثبت و منفی :

$d_{i+} = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}(V_{ij} - V_j^{+})^2}$ $d_{1+}=0.140$ $d_{2+}=0.530$ $d_{3+}=0.126$

$d_{i+} = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}(V_{ij} - V_j^{-})^2}$ $d_{1-}=0.405$ $d_{2-}=0.126$ $d_{3-}=0.530$

مرحله پنجم : در این مرحله با توجه به فرمول زیر نزدیکی نسبی P_iبه ایده آل را محاسبه می کنیم :

, $i=1,2,3$

$cl_{+} = \frac{d_{i-}}{d_{i+} + d_{i-}}$

$cl_{1+}=0.742$ $cl_{2+}=0.192$ $cl_{3+}=0.807$

مرحله ششم : در این مرحله که آخرین مرحله می باشد به رتبه بندی شاخص ها می پردازیم که عبارتند از :

$$\begin{cases} P_3 \\ P_1 \\ P_2 \end{cases}$$

۴-۸- روش VIKOR (روش بهینه سازی چند معیاره و راه حل توافقی)

روش VIKOR به عنوان یک روش قابل اجرا در مشکلاتی که برای ما در تصمیم گیری وجود دارد، استفاده می شود؛ که از آن برای روش تصمیم گیری چند معیاره ، برای حل یک مشکل تصمیم گیری گسسته یا حل مسائل گسسته ی توسعه داده شده استفاده می شود.

این روش بر رتبه بندی و انتخاب مجموعه ای از گزینه های جایگزین ، تعیین مراحل مصالحه که می تواند تصمیم گیرندگان را برای رسیدن به یک راه حل نهایی کمک کند ، تمرکز می کند.

با توجه به برتری های منحصر به فرد، VIKOR به طور گسترده در زمینه های مختلف تصمیم گیری مانند انتخاب مواد ، رباط و انتخاب عرضه کننده استفاده می شود. در بین روش های تصمیم گیری VIKOR یک جایگزین قدرتمند برای دیگر تکنیک ها و روش ها ست.

مراحل روش VIKOR

در یک مساله تصمیم گیری چند معیاره n معیار و m گزینه ها ست پس خواهیم داشت:

۴-۸-۱- تشکیل ماتریس تصمیم

$$X = \begin{cases} X_{11}, \ldots, X_{1n} \\ : \ \ldots\ldots\ldots \\ X_{m1}, \ldots, X_{mn} \end{cases}$$

که X_{ij} عملکرد گزینه (ii=1,2,...m)در رابطه با معیار j(j=1,2,...n) می باشد.

۴-۸-۲- بی مقیاس کردن ماتریس تصمیم

در این مرحله، معیارها با ابعاد مختلف باید به معیارهایی بی بعد تبدیل شوند:

$$f = \begin{cases} f_{11} & \cdots & f_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{cases}$$

و

$$f_{ij} = \frac{X_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} Xij}}$$

۴-۸-۳- بردار وزن معیار

$$w = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$$

۴-۸-۴- تعیین بهترین و بدترین مقدار از میان مقادیر موجود برای هر معیار

بهترین (f_j) مقدار برای معیار مثبت و منفی به ترتیب :

$$f_j^* = \max f_{ij}$$

$$f_j^* = \min f_{ij}$$

بدترین (f_j) مقدار برای معیار مثبت و منفی به ترتیب:

$$f_j^- = \max f_{ij}$$

$$f_j^- = \min f_{ij}$$

۴-۸-۵- مقدار سودمندی و مقدار تاسف

سودمندی =1(S)

تاسف =2(R)

$$S_I = \sum_{i=1}^{n} W_i \frac{F_J^* - F_J}{F_J^* - F_J^-}$$

$$R_I = MAX \left[W_J \frac{F_J^* - F_{IJ}}{F_J^* - F_J} \right]$$

۴-۸-۶- محاسبه شاخص VIKOR (Q)

$$Q_I = v \left[\frac{S_I - S^-}{S^* - S^-} \right] + (1-v) \left[\frac{R_I - R^-}{R^* - R^-} \right]$$

$\left[\frac{S_I - S^-}{S^* - S^-} \right]$ بیان کننده ی نرخ فاصله از حل ایده آل و $\left[\frac{R_I - R^-}{R^* - R^-} \right]$ بیان کننده ی نرخ فاصله از حل نامناسب است.

پارامتر V با توجه به میزان توافق گروه تصمیم گیرنده انتخاب می شود. در صورت توافق بالا ، مقدار آن بیش از ۵/. و در صورت توافق بالای اکثریت آراء، مقدار آن مساوی ۵/. و در صورت توافق پایین ؛ مقدار آن کمتر از ۵/. خواهد بود.

مقدار Q تابعی از RI و SI است، که به ترتیب مقادیر فاصله از حل ایده آل به ازای P=1 و P=∞ در برنامه ریزی توافقی می باشد.

۴-۸-۷- مرتب کردن گزینه ها براساس مقادیر Rو Sو Q: که باید به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب شوند و باید گزینه برتر انتخاب شود. گزینه برتر در Q گزینه ای است که دو شرط زیر را برقرار سازد یا شامل دو شرط زیر باشد:

$$Q(A')Q(A'') \geq \frac{1}{(N-1)}$$

اولین گزینه برتر 'A

دومین گزینه برتر "A

N= تعداد گزینه ها

شرط ط : 'A باید حداقل در یکی از گروه های R و S به عنوان رتبه برتر شناخته شود، زمانی که شرط اول برقرار نباشد مجموعه ای از گزینه ها به عنوان گزینه ی برتر خواند بود .

$A_1, A_2, \ldots A_M$ یا $A', A'', \ldots A^n$ گزینه برتر

بیشترین مقدار M با توجه به رابطه زیر محاسبه می شود:

$$Q(A')Q(A'') \geq \frac{1}{(N-1)}$$

مثال:

ماتریس تصمیم زیر را که برای انتخاب محل مناسب یک نیروگاه هست، در نظر بگیرید و به روش ELECTRE حل کنید.

	درآمد	اشتغال	واحدهای خدماتی	میزان مشارکت	توزیع نتایج
$\boldsymbol{a_{ij}}$	**0.180**	**0.220**	**0.100**	0.250	0.250
A	800	30	10	5	5
B	750	34	15	5	4
C	340	10	6	7	6
D	342	29	12	6	4
E	233	12	10	5	7
F	238	18	5	4	5
G	457	30	8	6	5

ماتریس نرمال و به توان رساندن جمع هر ستون :

	درآمد	اشتغال	واحدهای خدماتی	میزان مشارکت	توزیع نتایج
a_{ij}	0.180	0.220	0.100	0.250	0.250
A	640000	900	100	25	25
B	562500	1156	225	25	16
C	115600	100	36	49	36
D	116964	841	144	36	16
E	54289	144	100	25	49
F	56644	324	25	16	25
G	208849	900	64	36	25
جمع	1754846	4365	694	212	192

ماتریس نرمال – گرفتن جذر مجموع هر ستون و تقسیم بر عدد تصمیم گیری

	درآمد	اشتغال	واحدهای خدماتی	میزان مشارکت	توزیع نتایج
a_{ij}	0.180	0.220	0.100	0.250	0.250
A	0.604	0.454	0.380	0.343	0.361
B	0.566	0.515	0.569	0.343	0.289
C	0.257	0.151	0.228	0.481	0.433
D	0.258	0.439	0.456	0.412	0.289
E	0.176	0.182	0.380	0.343	0.505
F	0.180	0.272	0.190	0.275	0.361
G	0.345	0.454	0.304	0.412	0.361

ماتریس نرمال وزنی- ضرب وزن معیار ها بر عدد هر بخش

	درآمد	اشتغال	واحدهای خدماتی	میزان مشارکت	توزیع نتایج
a_{ij}	0.180	0.220	0.100	0.250	0.250
A	0.109	0.100	0.038	0.086	0.090

B	0.102	0.113	0.057	0.086	0.072
C	0.046	0.033	0.023	0.120	0.108
D	0.046	0.097	0.046	0.103	0.072
E	0.032	0.040	0.038	0.086	0.126
F	0.032	0.060	0.019	0.069	0.090
G	0.062	0.100	0.030	0.103	0.090

پیدا کردن بیشترین و کمترین عدد هر ستون و تفاضل آنها :

f max	0.109	0.113	0.057	0.120	0.126
f min	0.032	0.033	0.019	0.069	0.072
f+ - F-	0.077	0.080	0.038	0.052	0.054

منهای مقدار قبلی f max :

	درآمد	اشتغال	واحدهای خدماتی	میزان مشارکت	توزیع نتایج
a_{ij}	0.180	0.220	0.100	0.250	0.250
A	0.000	0.013	0.019	0.034	0.036
B	0.007	0.000	0.000	0.034	0.054
C	0.063	0.080	0.034	0.000	0.018
D	0.062	0.017	0.011	0.017	0.054
E	0.077	0.073	0.019	0.034	0.000
F	0.076	0.053	0.038	0.052	0.036
G	0.047	0.013	0.027	0.017	0.036

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \frac{f_i^* - f_{ij}}{f_i^* - f_i^-}; \qquad R_j = \max_i \left[w_i \cdot \frac{f_i^* - f_{ij}}{f_i^* - f_i^-} \right]$$

	درآمد	اشتغال	واحدهای خدماتی	میزان مشارکت	توزیع نتایج		
a_{ij}	0.180	0.220	0.100	0.250	0.250	S	R
A	0.000	0.037	0.050	0.167	0.167	0.420	0.167
B	0.016	0.000	0.000	0.167	0.250	0.433	0.250
C	0.146	0.220	0.090	0.000	0.083	0.539	0.220
D	0.145	0.046	0.030	0.083	0.250	0.555	0.250
E	0.180	0.202	0.050	0.167	0.000	0.598	0.202

F	0.178	0.147	0.100	0.250	0.167	0.842	0.250
G	0.109	0.037	0.070	0.083	0.167	0.466	0.167

S-	0.842	R-	0.250
S*	0.420	R*	0.167

$$Q_j = v \cdot \frac{S_j - S^-}{S^* - S^-} + (1-v) \cdot \frac{R_j - R^-}{R^* - R^-}$$

a_{ij}	
A	1.000
B	0.485
C	0.538
D	0.340
E	0.579
F	0.000
G	0.946

۴-۹-روش تسلط تقریبی (ELECTERE)

این روش یکی از معروف ترین روش های رتبه بندی ، به ویژه در اروپاست. در این روش از مفهوم تسلط به صورت ضمنی استفاده می شود. روش گزینه ها به صورت زوجی با یکدیگر مقایسه می شوند و گزینه های مسلط و ضعیف شناسایی شده و سپس گزینه های ضعیف حذف می شوند.

روش تسلط تقریبی :

اگر در یک مسئله تصمیم گیری چند معیاره، n معیار وm گزینه وجود داشته باشد، به منظور انتخاب بهترین گزینه با استفاده از روش تسلط تقریبی مراحل زیر باید انجام شود:

۴-۹-۱- تشکیل ماتریس تصمیم

با توجه به تعداد معیارها و تعداد گزینه ها و مقادیر ارزیابی شده ی گزینه ها برای معیا رهای مختلف ماتریس تصمیم به صورت زیر تشکیل می شود:

$$X=\begin{bmatrix} x11 & \cdots & x1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ xm1 & \cdots & xnm \end{bmatrix}$$

که در آن x_{ij} عملکرد گزینه ی iام(i=1,2,…,n) در رابطه با معیار (j=1,2,…,n) می باشد.

۴-۹-۲- بی مقیاس کردن ماتریس تصمیم

در این مرحله سعی می شود معیار ها با ابعاد مختلف به معیار های بدون بعد تبدیل شوند و ماتریس R به صورت زیر تعریف شود:

$$R=\begin{bmatrix} r11 & \cdots & r1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ rm1 & \cdots & rmn \end{bmatrix}:$$

روش های مختلفی برای بی مقیاس کردن وجود دارد، اما در روش تقریبی ۱ از رابطه زیر استفاده می شود :

$$rij = \frac{xij}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} xij^2}}$$

۴-۹-۳- تعیین ماتریس وزن معیارها

در این مرحله با توجه به ضرایب اهمیت معیار های مختلف در تصمیم گیری، بردار ضریب اهمیت معیار ها به صورت زیر تعریف می شود :

$W=[w_1,w_2, \ldots , w_n]$

عناصر بردار w ضریب اهمیت معیار های مربوطه می باشد.

۴-۹-۴- تعیین ماتریس تصمیم وزن دار نرمال شده

ماتریس وزن دار از ضرب ماتریس تصمیم بی مقیاس شده در بردار وزن معیارها، به دست می آید :

$V=w_j r_{ij} \qquad j=1, \ldots , n$ ؛ $n=1, \ldots , m$

۴-۹-۵- تشکیل مجموعه معیار های موافق و مخالف

برای هر زوج گزینه $k , e(k,e=1,2,\ldots , m)$ مجموعه معیار های $j=(1,2,\ldots , m)$ به دو زیرمجموعه ی موافق و مخالف تقسیم می شوند، مجموعه ی موافق (S_k) مجموعه ای از معیار هایی است که در آنها گزینه ی k نسبت به e ترجیح دارد و مجموعه ی مکمل آن مجموعه ی مخالف (I_{ke}) می باشد. مجموعه معیار های موافق، برای معیار های مثبت و منفی به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند:

$S_{ke}= \{ j / V_{kj} \geq V_{ej}\}$

$S_{ke}= \{ j / V_{kj} \leq V_{ej}\}$

مجموعه معیار های مخالف برای معیار های مثبت ومنفی به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند :

$I_{ke}= \{ j / V_{kj}< V_{ej}\} =j - S_{ke}$

$I_{ke}= \{ j / V_{kj}> V_{ej}\} =j - S_{ke}$

۴-۹-۶- تشکیل ماتریس توافق

ماتریس توافق یک ماتریس مربعی است که بعد آن، تعداد گزینه ها می باشد. هر یک از درایه های این ماتریس ، شاخص توافق بین دو گزینه نامیده می شود. مقدار این شاخص، از جمع وزن معیار هایی که در مجموعه توافق وجود دارند ، بدست

می آید. به عبارت دیگر برای محاسبه ی شاخص توافق (c_k) باید گزینه ی k و گزینه ی e مقایسه شده و مقدار آن از جمع وزن معیار هایی که k نسبت به e ترجیح دارد، بدست آید. به زبان ریاضی شاخص توافق از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$C_{ke}=\frac{\sum_{j\in s_{ke}} Wj}{\sum_{j=1} Wj}$$

درمجموع وزن های نرمال شده، $\sum_{j\in 1} Wj$ مساوی یک است لذا :

$$C_{ke}=\sum_{j\in S_{ke}} Wj$$

شاخص توافق، بیانگر میزان برتری گزینه ی k بر e بوده و مقدار آن از صفر تا یک تغییر می کند. با محاسبه ی شاخص توافق برای همه ی زوج گزینه ها، می توان ماتریس توافق اولیه را تعریف کرد . در حالت کلی این ماتریس متقارن نیست .

۴-۹-۷- تعیین ماتریس مخالف

ماتریس مخالف یک ماتریس مربعی است که بعد آن، تعداد گزینه ها می باشد . هر یک از درایه های این ماتریس، شاخص عدم توافق بین دو گزینه نامیده می شود . مقدار این شاخص از رابطه ی زیر محاسبه می شود :

$$D_{ke}=\frac{max|Vkj - Vej|}{max|Vkj - Vej|}$$

مقدار شاخص عدم توافق (مخالف) از صفر تا یک تغییر می کند . با محاسبه ی شاخص عدم توافق برای همه زوج گزینه ها، می توان ماتریس عدم توافق را رسم کرد .

۴-۹-۸- تشکیل ماتریس تسلط موافق

در این مرحله، یک مقدار معین برای شاخص توافق مشخص می شود که آن را آستانه ی موافقت می نامند.

$$\acute{C}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq e}}^{m}\sum_{\substack{e=1\\e\neq k}}^{m}\frac{C\,ke}{m(m-1)}$$ *سی بار*

اگر C_{ke} بزرگتراز c (سی بار) باشد برتری گزینه ی k بر e قابل قبول است . در غیر اینصورت خیر .

۴-۹-۹- تشکیل ماتریس مخالف :

$$D=\sum_{\substack{k=1\\k\neq e}}^{m}\sum_{\substack{e=1\\e\neq k}}^{m}\frac{d\,ke}{m(m-1)}$$ *دی بار*

۴-۹-۱۰- تشکیل ماتریس تسلط نهایی

از ضرب تک تک درایه های ماتریس تسلط موافق در تسلط مخالف، حاصل می شود :

$$H_{ke}=f_{ke}\ .\ g_{ke}$$

۴-۹-۱۱- انتخاب برترین گزینه

به طور مثال اگر مقدار h_{ke} برابر با یک باشد، بدین معناست که برتری گزینه k بر گزینه e در هردو حالت موافق و مخالف، قابل قبول است و لیکن هنوز k شانس مسلط شدن توسط گزینه های دیگر را دارد .گزینه ای باید انتخاب شود که بیشتر از آنکه مغلوب شود ، تسلط داشته باشد و از این نظر می توان گزینه را رتبه بندی کرد.

مثال برای electere :

مثال : فردی قصد دارد که یکی از خودروهای پراید ، پیکان و پژو را خریداری کند. خودروهای مورد نظر ، با چهار شاخص هزینه ، سرعت ، کیفیت خدمات پس از فروش و ضمانت مورد ارزیابی قرار می گیرند. شاخص هزینه ، از نوع فنی و سه شاخص دیگر ، مثبت هستند.

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	۵	۸	۱۳	۴
A_2	۴	۱۰	۹	۲
A_3	۸	۱۲	۶	۳

$$W = [0.305, 0.092, 0.336, 0.267]$$

گام ۱ : مقادیر ماتریس تصمیم را با فرمول زیر بی مقیاس می کنیم.

$$n_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a^2_{ij}}}$$

گام ۲ : برای محاسبه ی ماتریس بی مقیاس وزنی (V) ، مقادیر ماتریس بی مقیاس شده (N) را در وزن شاخص ها (W) ضرب می کنیم.

n=

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	0.488	0.456	0.769	0.743
A_2	0.390	0.570	0.532	0.371
A_3	0.781	0.684	0.355	0.557

	C^-_1	C^+_2	C^+_3	C^+_4
A_1	0.149	0.042	0.258	0.198

$$V = N \times W_{n \times n} = \quad \begin{array}{c|cccc} A_2 & 0.119 & 0.052 & 0.179 & 0.099 \\ A_3 & 0.238 & 0.063 & 0.119 & 0.149 \end{array}$$

	C_1^-	C_2^+	C_3^+	C_4^+
A_1	0.149	0.042	0.258	0.198
A_2	0.119	0.052	0.179	0.099
A_3	0.238	0.063	0.119	0.149

گام ۳ : تعیین مجموعه هماهنگ و ناهماهنگ

ترجیح گزینه ۱ ، بر گزینه ۲ را در نظر بگیرید. گزینه ۱ از نظر شاخص های سوم و چهارم (که شاخص های مثبتی هستند)، بر گزینه ۲ برتری دارد؛ زیرا در ماتریس V ، مقدار آن بیشتر است (۰,۱۹۸ ≤۰,۰۹۹ و ۰,۲۵۸ ≤ ۰,۱۷۹). بنابراین ، شاخص های ۳و۴، ترجیح گزینه ۱ بر گزینه ۲ را تایید می کند و در مجموعه ی هماهنگ قرار می گیرد. ولی از نظر شاخص اول «هزینه» (که شاخص منفی است)، گزینه دوم وضعیت بهتری دارد؛ زیرا مقدار آن کمتر است (۰,۱۴۹ < ۰,۱۱۹) . همچنین از نظر شاخص دوم «سرعت» که (شاخص مثبتی است)، گزینه دوم وضعیت بهتری دارد؛ زیرا مقدار آن بزرگتر است (۰,۰۵۲ < ۰,۰۴۲). بنابراین از نظر دو شاخص ۱ و ۲، ترجیح گزینه اول بر دومی تایید نمی شود و این دو شاخص ، در مجموعه ی شاخص های ناهماهنگ قرار می گیرد. در مورد بقیه نیز به همین صورت عمل می شود :

$S_{12} = \{3,4\}$ $\qquad D_{12} = \{1,2\}$

$S_{23} = \{1,3\}$ $\qquad D_{23} = \{2,4\}$

$S_{21} = \{1,2\}$ $\qquad D_{21} = \{3,4\}$

$S_{31} = \{2\}$ $\qquad D_{31} = \{1,3,4\}$

$S_{32} = \{2,4\}$ $\qquad D_{32} = \{1,3\}$

گام ۴ : تعیین ماتریس هماهنگ

$$I_{ki} = \sum Wj \qquad , \quad j \in Ski$$

برای «تشکیل ماتریس هماهنگ» بر اساس مجموعه های هماهنگ عمل می کنیم. مثلا برای محاسبه میزان (درجه) هماهنگی ترجیح گزینه ی اول بر دوم ، بر اساس $S_{12} = \{3,4\}$ ، وزن های شاخص های سوم و چهارم (یعنی ۰,۳۳۶ و ۰,۲۶۷) را با هم جمع می کنیم.

$$\mathbf{I\ 12 = W3 + W4 = 0.336 + 0.267 = 0.603}$$

$$\mathbf{I\ 13 = W1 + W3\ + W4 = 0.305 + 0.336 + 0.267 = 0.908}$$

$$\mathbf{I\ 23 = W1 + W3 = 0.305 + 0.336 = 0.641}$$

$$\mathbf{I\ 21 = W1 + W2 = 0.305 + 0.092 = 0.397}$$

$$\mathbf{I\ 31 = W2 = 0.092}$$

$$\mathbf{I\ 32 = W2 + W4 = 0.092 + 0.267 = 0.359}$$

$$\text{Iki} = \begin{bmatrix} - & 0.603 & 0.908 \\ 0.397 & - & 0.641 \\ 0.092 & 0.359 & - \end{bmatrix}$$

توجه : اگر ترجیح دو گزینه از نظر شاخصی مساوی باشد ، مقدار W_j در ماتریس هماهنگ وارد می شود.

گام ۵ : تعیین ماتریس ناهماهنگ

بر اساس V (گام ۲) و با استفاده از فرمول زیر ، هر عنصر ماتریس ناهماهنگ را حساب می کنیم.

$$\boldsymbol{NI_{ki}} = \frac{\text{Max } |\text{Vkj} - \text{Vij}|\ ,\ \text{j} \in \text{D k,i}}{\text{Max } |\text{Vkj} - \text{Vij}|\ ,\ \text{j} \in \text{همه شاخص ها}}$$

$$NI\ 12 = \frac{Max\ \{\ |V11\ - V21|\ ,\ |V12\ - V22\ |\}}{Max\ \{|V11\ - V21|\ ,\ \ |V12\ - V22|\ ,\ |V13\ - V23|\ ,\ |V14\ - V24|\}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{Max}\ \{\ |\mathbf{0.149 - 0.119}|\ ,\ |\mathbf{0.042 - 0.052}|\}}{\boldsymbol{Max}\ \{|\mathbf{0.149 - 0.119}|\ ,\ \ |\mathbf{0.042 - 0.052}|\ ,\ |\mathbf{0.258 - 0.179}|\ ,\ |\mathbf{0.198 - 0.099}|\}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{Max}\ \{\mathbf{0.03\ ,\ 0.01}\}}{\boldsymbol{Max}\ \{\mathbf{0.03,0.01,0.079,0.099}\}} = \frac{\mathbf{0.03}}{\mathbf{0.099}} = \mathbf{.303}$$

$$\boldsymbol{NI}\ \mathbf{13 = 0.151}$$

$$\boldsymbol{NI}\ \mathbf{21 = 1}$$

$$\boldsymbol{NI}\ \mathbf{23 = 0.420}$$

$$\boldsymbol{NI}\ \mathbf{31 = 1}$$

$$\boldsymbol{NI}\ \mathbf{32 = 1}$$

بنابراین ، ماتریس ناهماهنگ (NI) به صورت زیر خواهد بود:

$$\boldsymbol{NI\ k,i} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{0.303} & \mathbf{0.151} \\ \mathbf{1} & - & \mathbf{0.420} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & - \end{bmatrix}$$

گام ۶ : ابتدا مقدار آستانه را حساب می کنیم :

$$= \frac{\text{جمع مقادیر ماتریس هماهنگ}}{\text{تعداد مقادیر ماتریس هماهنگ}} \Longrightarrow \bar{\mathrm{I}} = \frac{3}{6} = 0.5\bar{I}$$

سه مقدار بالای قطر (۰,۶۰۳ ، ۰,۹۰۸ و ۰,۶۴۱) ، بزرگتر از حد آستانه (۰,۵) هستند و در ماتریس هماهنگ موثر ، عدد ۱ خواهند گرفت. سه مقدار دیگر (مقادیر زیر قطر) ، کوچکتر از ۰,۵ هستند و عدد صفر خواهند گرفت. بنابراین ، ماتریس H به صورت زیر خواهد بود :

$$H = \begin{bmatrix} - & 1 & 1 \\ 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

فصل پنجم: تصمیم گیری چند هدفه

۵-۱- مقدمه

در دنیای واقعی امروز حل برخی از مسائل در گرو بهینه سازی بیش از یک تابع هدف می باشد. این بدین معنی است که مدیران شرکت ها در صدد دستیابی به مقادیر بهینه ی متغیر های تصمیم هستند تا به وسیله آن به چند هدف دست یابند. برای مثال در عصر حاضر با توجه به اهمیت مسایل زیست محیطی در تولید و خدمات، مدیران بر آنند که علاوه بر اینکه سود شرکت خود را بیشینه کنند اثرات مخرب زیست محیطی آن را نیز به طور همزمان، کمینه نمایند. در این فصل به ارائه مفاهیم، مدل ها، و روش های حل تصمیم گیری چند هدفه که بیشتر برای مسائل طراحی استفاده می شوند، پرداخته خواهد شد.

۵-۲- شکل ریاضی مدل های چند هدفه

چنان که اشاره شد در(مدل های چند هدفه) بر خلاف برنامه ریزی خطی (که تنها یک هدف دارد) با چند هدف مواجه هستیم. به طور کلی، یک مدل چند هدفه با K هدف مختلف f_1 ، f_2 ، f_3 ، ... و f_k را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max (min)} & f_1(x_j) \\
\text{Max (min)} & f_2(x_j) \\
 & \\
\text{Max (min)} & f_k(x_j) \\
\text{St:} & \\
G_i(x_j) \le b_i , & i=1,2,\ldots,m \\
x_j \ge 0 , & j=1,2,\ldots,n
\end{array}
$$

(محدودیت های عملیاتی) — $Gi(xj)\le b_i$

(محدودیت های غیر منفی) — $xj\ge 0$

که x_j متغیر تصمیم j ، n تعداد متغیرهای تصمیم، $G_i(x_j)$ محدودیت i ام ، m تعداد محدودیت ها و b_i مقداری غیرمنفی و ثابت است.

در مدل های چند هدفه، تابع هدف و محدودیت ها می توانند غیرخطی باشند. ولی برای سادگی کار در ادامه‌ی مباحث، در اکثر موارد با مدل‌های خطی کار می‌کنیم و توابع هدف و محدودیت های غیرخطی را مورد بررسی قرار نمی دهیم.

یک مسئله تصمیم‌گیری چندهدفه کمینه سازی، در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } \left(f_1(X), f_2(X), \ldots, f_n(X)\right) \\
&s.t. \qquad\qquad\qquad\qquad (1-1) \\
&\quad x \in X
\end{aligned}
$$

رابطه ی فوق یک مدل ریاضی با n هدف را نشان می‌دهد. هر پاسخ شدنی یا موجه یعنی پاسخی که تمامی محدودیت‌ها را تامین نماید، دارای n مقدار است که این مقادیر در مقایسه با ارزش پاسخ های دیگر می‌تواند حالت‌های مختلفی را شامل شوند. یک جواب x برداری از m متغیر تصمیم $X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)^T$ در فضای شدنی X است.

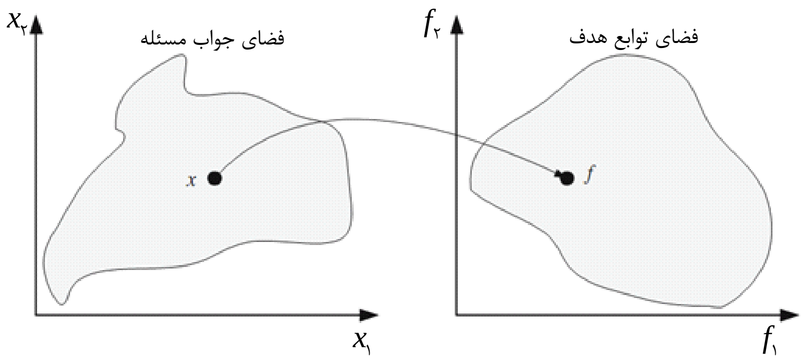
یک تفاوت برجسته بین بهینه‌سازی چند هدفه و تک هدفه این است که در بهینه‌سازی چندهدفه علاوه بر فضای متغیر تصمیم، توابع هدف نیز یک فضای چندبعدی را تشکیل می‌دهند که فضای هدف (Z) نام دارد. برای هر جواب x در فضای متغیر تصمیم، یک نقطه در فضای تابع هدف وجود دارد به عبارت دیگر یک نگاشت بین بردار m بعدی جواب و بردار n بعدی

هدف وجود دارد که با $F(X)=\{f_1(X),f_2(X),...,f_n(X)\}$ نشان داده می‌شود. تصویر X یا همان ناحیه ی شدنی تحت نگاشت F در فضای هدف به صورت:

$$Z=F(X)=\cup_{x\in X}\{F(X)\} \qquad (۱-۲)$$

تعریف می‌شود. شکل ۵-۱ ارتباط بین این دو ناحیه را نشان می‌دهد.

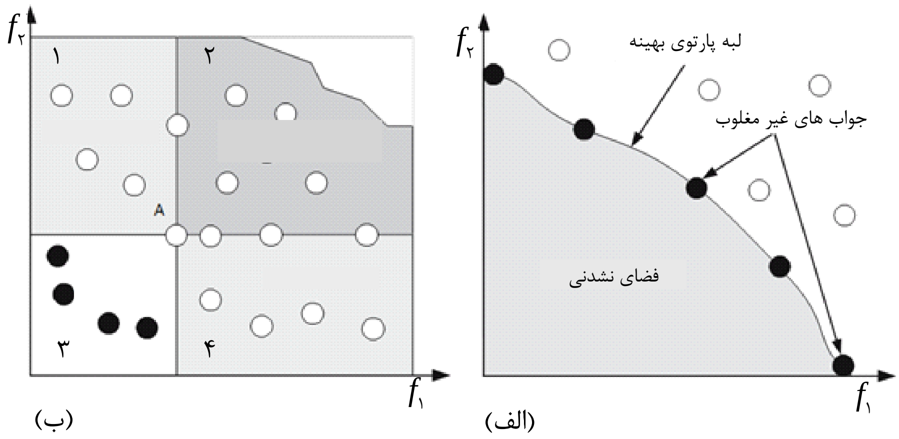
مشکل عمده در حل مسائل بهینه‌سازی چند هدفه از آنجا ناشی می‌شود که جواب بهینه ی شدنی توابع هدف مختلف، لزوماً باهم، هم راستا نبوده و در مواردی با یکدیگر در تعارض[6] هستند. در چنین شرایطی نمی‌توان همه اهداف را به صورت همزمان بهینه کرد. در عوض باید به جستجوی تعادل رضایت بخشی[7] بین این جواب‌ها پرداخت. بنابراین مفاهیم بهینگی ویژه‌ای، در مسائل بهینه‌سازی چند هدفه مورد نیاز است.



شکل ۵- ۱. مثالی از نگاشت بین فضای جواب و فضای توابع هدف

در مسائل بهینه‌سازی تک هدفه مجموعه پاسخ های شدنی، به طور کامل و بر اساس مقدار تابع هدف f قابلیت مرتب شدن دارند به گونه‌ای که در مورد دو جواب $x_1,x_2\in X$ خواهیم داشت $f(x_1)\le f(x_2)$ و یا $f(x_2)\le f(x_1)$. در اینجا هدف یافتن جواب یا جواب‌هایی است که تابع f را کمینه می‌کند (برای یک مسئله کمینه‌سازی). هنگامی که مسئله بیش از یک هدف داشته باشد، X مجموعه‌ای کاملاً مرتب[8] نیست، بلکه در حالت کلی یک مجموعه مرتب جزئی[9] است. این مفهوم در شکل ۵-۲-الف نشان داده شده است. این شکل مربوط به مسئله کمینه‌سازی همزمان دو هدف f_1 و f_2 است. با توجه به شکل ۵-۲-ب جواب مربوط به نقطه A نسبت به جواب نقطه ناحیه ۲ ارجح است، چرا که همزمان مقادیر f_1 و f_2 کوچک‌تری دارد. همچنین می‌توان گفت که نقطه A مغلوب نقطه ناحیه ۳ خواهد شد، چرا که همزمان مقادیر f_1 و f_2 بزرگ‌تری دارد. نقطه A نسبت به نقاط نواحی ۱ و ۴ قابل‌مقایسه نیست، زیرا اگر یکی از آن‌ها، از نظر یکی از توابع هدف، برتر باشد؛ نسبت به تابع هدف دیگرحالت بدتری دارد و بالعکس.

6 Conflict
7 Satisfactory trade-off
8 Totally ordered
9 Partially ordered



شکل ۵-۲. (الف) بیان تصویری بهینگی پارتو در فضای هدف،
(ب) روابط بین جواب‌ها در فضای هدف

۵-۳ مفهوم تسلط[۱۰] (چیرگی)

اکثر الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه از مفهوم چیرگی استفاده می‌کنند. در این الگوریتم‌ها دو جواب بر اساس اینکه کدام‌یک بر دیگری مسلط است باهم مقایسه می‌شوند. به دلیل اینکه در مسائل بهینه‌سازی چند هدفه هم مسئله بیشینه سازی و هم مسئله کمینه سازی داریم از عملگر $\prec$ برای مقایسه دو جواب $x_۱$ و $x_۲$ استفاده می‌کنیم. برای مثال اگر داشته باشیم $x_۲ \prec x_۱$ به این معنی است که جواب $x_۲$ از جواب $x_۱$ از لحاظ حداقل یکی از توابع هدف بهتر است (در بقیه توابع هدف‌ها ممکن است مساوی و حتی بدتر باشد). اگر مسئله کمینه سازی باشد عملگر $\prec$ برای ارزش تابع هدف به معنی همان کوچک‌تر ($<$) است؛ اما اگر مسئله بیشینه سازی باشد عملگر $\prec$ نقش بزرگ‌تر ($>$) را برای ارزش تابع هدف ایفا می‌کند.

بنابراین جواب $x_۱$ بر جواب $x_۲$ مسلط یا نسبت به آن کارا است، اگر و تنها اگر:

۱) جواب $x_۱$ بدتر از جواب $x_۲$ نباشد یا به عبارتی داشته باشیم:

$$f_i(x_۱) \not\prec f_i(x_۲) \qquad \forall i = ۱,۲,\dots,n$$

یعنی هیچ تابع هدفی نباشد که در آن جواب $x_۲$ مقدار بهتری نسبت به جواب $x_۱$ داشته باشد (مساوی و یا بدتر).

۲) جواب $x_۱$ حداقل از لحاظ یکی از توابع هدف از جواب $x_۲$ بهتر باشد، یعنی

$$f_j(x_۱) \succ f_j(x_۲) \qquad \exists j \in i = ۱,۲,\dots,n$$

بنابراین اگر جواب $x_۱$ بر جواب $x_۲$ مسلط شود به اختصار می‌نویسیم: $x_۱ \preccurlyeq x_۲$. اگر شرط دوم برقرار نباشد، اصطلاحاً گفته می‌شود که جواب $x_۱$ به صورت ضعیف، کارا[۱۱] یا مسلط است.

با توجه به مفهوم تسلط، برای هر دو جواب $x_۱$ و $x_۲$ یکی از حالات زیر برقرار است:

۱) $x_۲ \preccurlyeq x_۱$ ($x_۱$ بر $x_۲$ مسلط است)

۲) $x_۱ \preccurlyeq x_۲$ ($x_۲$ بر $x_۱$ مسلط است)

۳) $x_۱ \approx x_۲$ ($x_۱$ نسبت به $x_۲$ بی‌تفاوت است)

---

[10] Domination
[11] Weakly efficient

رابطه چیرگی یک رابطه تعدی[12] است، یعنی اگر $x_1 \preccurlyeq x_2$ و $x_2 \preccurlyeq x_3$ آنگاه $x_1 \preccurlyeq x_3$. همچنین چیرگی یک رابطه متقارن[13] نیست، یعنی اگر x_1 بر x_2 مسلط باشد، آنگاه x_2 بر x_1 مسلط نخواهد بود. با توجه به شکل ۱-۲-ب نقطه A بر نقاط ناحیه ۲ غالب[14] است، نقطه A توسط نقاط ناحیه ۳ مغلوب[15] می‌شود و نهایتاً نقاط ناحیه ۱ و ۴ نسبت به نقطه A بی‌تفاوت[16] هستند.

۵-۴ مفهوم بهینگی پارتو و مجموعه نامغلوب

بر اساس مفهوم چیرگی می‌توان معیار بهینگی در مسائل چند هدفه را تعریف نمود. نقاط توپری که در شکل ۱-۲-الف رسم شده‌اند ویژگی منحصر به فردی نسبت به سایر نقاط در فضای تابع هدف دارند که به این معناست که این نقاط مغلوب هیچ پاسخ دیگری ندارند، بنابراین می‌توان آن‌ها را بهینه دانست. از طرف دیگر نمی‌توان هیچ یک از تابع هدف این نقاط را بهبود داد بدون اینکه مقدار تابع هدف دیگر آن‌ها را بدتر نمود. به چنین جواب‌هایی بهینه پارتو[17] گویند.

تعریف ۵- ۱) بهینگی پارتو: بردار تصمیم $x \in X$ نسبت به مجموعه $A \subset X$ نامغلوب[18] خوانده می‌شود، اگر و تنها اگر:

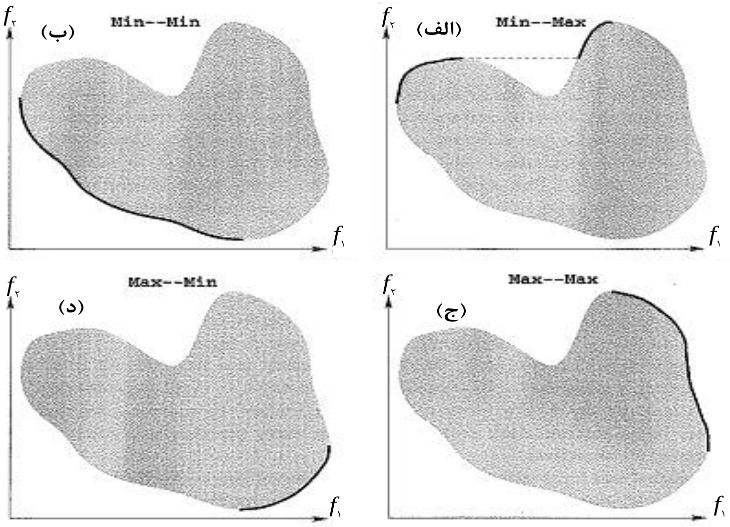
$$\nexists a \in A,\ x\ a \preccurlyeq$$

تعریف ۵- ۲) مجموعه نامغلوب: به مجموعه‌ای از جواب‌های موجود در فضای تصمیم که بر جواب‌های دیگر مسلط هستند و بر همدیگر مسلط نیستند مجموعه نامغلوب گویند.

نقاط توپر در شکل ۵-۱-ب مجموعه جواب‌های بهینه پارتو، کارا و یا نامغلوب هستند. این نقاط نسبت به یکدیگر بی‌تفاوت هستند. در اینجا تفاوت اصلی مسائل چند هدفه، با مسائل تک هدفه آشکار می‌شود. مسائل چند هدفه محدود به یک جواب بهینه واحد نیستند بلکه در آن‌ها مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه (پارتو) وجود دارد. هیچ یک از این جواب‌ها را نمی‌توان از دیگری برتر دانست، مگر اینکه ترجیحات تصمیم‌گیرنده تعریف شده باشند.

تعریف ۵- ۳) مجموعه بهینه پارتوی سراسری: مجموعه تمام جواب‌های بهینه پارتو در یک مسئله چند هدفه را مجموعه بهینه پارتو (مجموعه بهینه پارتوی سراسری) و نقاط متناظر با آن را لبه یا سطح بهینه پارتو[19] می‌نامند. شکل ۵-۳ لبه پارتو را برای مسائل بهینه‌سازی دو هدفه، زمانی که توابع هدف از نوع کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی باشند به تصویر می‌کشد. شکل ۵-۳-الف حالتی را که تابع هدف اول از نوع کمینه‌سازی و تابع هدف دوم از نوع بیشینه‌سازی باشد، شکل ۵-۳-ب حالتی که هر دو تابع هدف از نوع کمینه‌سازی باشند، شکل ۵-۳-ج حالتی را که هر دو تابع هدف از نوع بیشینه‌سازی باشند و نهایتاً شکل ۵-۳-د حالتی را که تابع هدف اول از نوع بیشینه‌سازی و تابع هدف دوم از نوع کمینه‌سازی باشد نشان می‌دهد.

[12] Transitive
[13] Symmetric
[14] Dominant
[15] Dominated
[16] Incomparable
[17] Pareto optimal
[18] Non-dominated
[19] Pareto-optimal front



شکل ۵-۳. لبه پارتو برای مسائل بهینه‌سازی مختلف با دو تابع هدف

به طور کلی در اینجا چهار مفهوم (جواب بهینه[20]) ، (جواب غیرمسلط[21]) ، (جواب مرجح[22]) و (جواب رضایت‌بخش[23]) را معرفی می کنیم.

۵-۳-۱ جواب بهینه: جوابی است که همزمان تمامی اهداف را بهینه کند، به این جواب گاهی جواب برتر نیز گفته می شود. در صورتی که جواب بهینه برای مساله وجود نداشته باشد، مفاهیم بعدی مطرح می شود.

۵-۳-۲ جواب غیر مسلط: جواب غیر مسلط جوابی است که نمی توان هیچ تابع هدفی را بهبود بخشید بدون آن که هم زمان باعث دور شدن حداقل یکی از اهداف دیگر شود.

۵-۳-۳ جواب مرجح: جواب مرجح جواب غیر مسلطی است که توسط تصمیم گیرنده (با توجه به برخی از اهداف اضافی) به عنوان جواب نهایی برگزیده می شود.

۵-۳-۴ جواب رضایت بخش: جواب رضایت بخش، جوابی است که سطوح موردنظر اهداف را برای تصمیم گیرنده محقق می سازد. جواب رضایت بخش لزوماً جواب غیرمسلطی نیست. این جواب برای تصمیم گیرندگانی که دانش و توانایی‌شان محدود است، مطرح می شود.

برای روشن شدن مفاهیم فوق به مثال ۵-۲ توجه کنید.

مثال ۵-۲

دو مساله‌ی چند هدفه‌ی زیر را، که دارای محدودیت های مشترکی هستند، در نظر بگیرید.

---

[20] Optimal solution
[21] Nondominated solution
[22] Preferred solution
[23] Satisfying solution

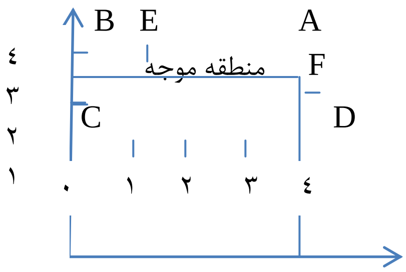
$$\text{Max } f_1 = x + y$$
$$\text{Max } f_2 = -x + y$$
St:
$$x \le 4$$
$$y \le 4$$
$$x, y \ge 0$$

(الف)

$$\text{Max } \quad f_1 = y$$
$$\text{Max } \quad f_2 = -x + y$$
St:
$$x \le 4$$
$$y \le 4$$
$$x, y \ge 0$$

(ب)

شکل زیر منطقه موجه را برای هر دو مسالهی الف و ب نشان می دهد.



با توجه به منطقه ی موجه ، مساله (ب) دارای یک جواب بهینه است. جواب بهینهی آن در نقطه ی B قرار دارد که $x=0$ و $y=4$ که در آن $f_1=4$ و $f_2=4$ است.

گوشه های موجه	مختصات	$f_1 = y$	$f_2 = -x + y$
A	(4,4)	۴	۰
B	(0,4)	۴ → MAX	۴ → **MAX**
C	(0,0)	۰	۰
D	(4,0)	۰	-۴

حال مساله ی (الف) را در نظر بگیرید. جواب بهینه برای این مساله وجود ندارد. نقطهی A هدف اول را بهینه می سازد و نقطهی B هدف دوم را. بنابراین جوابی وجود ندارد که همزمان دو تابع هدف را بهینه سازد.

گوشه های موجه	مختصات	$f_1 = y$	$f_2 = -x + y$
A	(4,4)	۸ → Max	۰
B	(0,4)	۴	۴ → **MAX**
C	(0,0)	۰	۰
D	(4,0)	۰	-۴

بنابراین در مساله ی (الف) مفهوم جواب های (غیر مسلط) مطرح می شود. دو نقطهی A و B از جمله جواب های غیر مسلط هستند، زیرا هر کدام یکی از توابع هدف را بهینه می سازد(تمامی جوابها به ازای $y=4$ و $0 \le x \le 4$ غیر مسلط هستند). دو نقطهی C و D جوابهای غیر مسلط نیستند، زیرا نقاط A و B حداقل از نظر یک هدف بر آنها برتری دارند.

ممکن است تصمیم گیرنده از بین جواب های غیر مسلط نقطه‌ی E را به عنوان جواب نهایی انتخاب کند، در این صورت به آن جواب مرجح گفته می شود.

$E(1,3) \quad f_1=1+3=4 \ , \ f_2=-1+3=2$

نقطه‌ی رضایت بخش تلقی می شود(گرچه این جواب، جوابی غیر مسلط است).

۵-۵ روش های حل مسائل چند هدفه:

بسته به چگونگی ترکیب فرایندهای بهینه سازی و تصمیم‌گیری، روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه را می‌توان به سه دسته تقسیم نمود:

- تصمیم‌گیری پیش از جستجو[24]: در این حالت، قبل از اجرای الگوریتم بهینه‌سازی درجه اهمیت توابع هدف توسط تصمیم‌گیرنده مشخص می‌شود که در اصطلاح به آن، بیان پیشین ترجیحات گفته می‌شود. در این حالت مساله ی چند هدفه به یک مساله ی معادل تک هدفه تبدیل می‌شود.
- جستجو پیش از تصمیم‌گیری[25]: در این حالت، بهینه‌سازی بدون هیچ‌گونه اطلاعاتی از اولویت‌بندی تصمیم‌گیرنده انجام می‌شود. نتیجه ی این جستجو مجموعه جواب‌های نامزد شده ایست (که در حالت ایده‌آل بهینه پارتو[26] هستند) که انتخاب نهایی از میان آن‌ها توسط تصمیم‌گیرنده صورت می‌پذیرد، که در اصطلاح به آن بیان پسین ترجیحات گفته می‌شود.
- تصمیم‌گیری در حین جستجو[27]: تصمیم‌گیرنده ترجیحات خود را در حین فرایند بهینه‌سازی تعاملی[28] ابراز می‌دارد. پس از هر گام بهینه‌سازی تعدادی از جواب‌ها به تصمیم‌گیرنده ارائه می‌شوند. سپس بر اساس این جواب‌ها ترجیحات خود را مشخص می‌نماید و به این ترتیب فرایند جستجو هدایت می‌شود که به آن بیان مترقی از ترجیحات گفته می‌شود.

ادغام توابع هدف چندگانه در قالب یک تابع هدف در تصمیم‌گیری پیش از جستجو، این مزیت را دارد که می‌توان در حل آن، از روش‌های موجود برای حل مسائل تک هدفه استفاده نمود. مشکل اصلی این رویکرد این است که برای تصمیم گیرنده بسیار دشوار خواهد بود که قبل از حل مساله، ارجحیت‌های خود را به‌صورت عددی و دقیق مشخص و بازگو نماید. از جمله این رویکردها می‌توان به روش‌های مجموع موزون[29]، برنامه‌ریزی توافقی[30] و برنامه‌ریزی آرمانی[31] نام برد. البته در این روش‌ها اغلب تلاش‌هایی نیز در جهت تحلیل حساسیت جواب نسبت به پارامترهای تأثیرگذار جهت پوشش فضای جواب‌های نامغلوب صورت می‌پذیرد.

مشکل اصلی رویکردهای پیش از تصمیم‌گیری، پیچیدگی‌های محاسباتی و وقت‌گیر بودن حل مساله است. از این روی، این روش‌ها در مسائلی که مقیاس بزرگی دارند چندان مورد توجه قرار نگرفته‌اند. ولی تصمیم‌گیرنده با علم به این موضوع که هیچ

[24] Priori articulation of preferences
[25] Posteriori articulation of preferences
[26] Pareto optimal Set
[27] Progressive articulation of preferences
[28] Interactive
[29] Weighted sum
[30] Compromise programming
[31] Goal programming

پاسخ بالقوه ی کشف نشده‌ای وجود ندارد، به جواب نهایی حاصل شده از ارجحیت‌های خود، اعتماد بیشتری خواهد داشت. روش‌های نمونه‌گیری پارتو[۳۲]، انتخاب ادغامی[۳۳]، اپسیلون- محدودیت [۳۴] از جمله این روش‌هاست.

در رویکردهای در حین جستجو، تصمیم‌گیرنده در تمام مراحل فرایند حل مساله درگیر می‌شود. در این حالت تصمیم‌گیرنده به صورت تناوبی در مورد ارجحیت‌هایش مورد سؤال واقع می‌شود و با هر پاسخ او، جهت جستجو هدایت می‌شود. انتقادی که به رویکردهای در حین جستجو وارد است، اینست که تصمیم‌گیرنده یک تصویر کلی (مجموعه پارتو) از تمام فضای جواب‌های هم‌ارز را مشاهده نمی‌کند، لذا ارجح‌ترین جواب به‌دست آمده، جوابی است که تاکنون ملاحظه کرده است. به این ترتیب مقداری از فضای جواب مورد غفلت قرار می‌گیرد.

چنان که اشاره شد در بسیاری از مسائل چند هدفه، جواب بهینه وجود ندارد؛ زیرا اهداف در اکثر مواقع در تضاد با هم هستند و بهینگی یک هدف، باعث دور شدن هدف دیگر از مقدار بهینه‌ی آن خواهد شد. بنابراین جواب بهینه در مدل‌های چندهدفه لزوماً مترادف با بهینه شدن تمامی توابع هدف نیست. در تصمیم گیری چند هدفه، روش‌های مختلفی برای حل این‌گونه مسائل وجود دارد که جواب هر روش با روش دیگر لزوماً یکسان نیست، زیرا مفروضات هر روش و همچنین میزان مشارکت تصمیم گیرنده در فرآیند حل آن، متفاوت است. در ادامه، پنج روش معروف و در عین حال نسبتاً ساده برای حل مسائل چند هدفه مطرح خواهد شد. این روش‌ها عبارتند از:

- ✓ روش تبدیل تابع هدف به محدودیت
- ✓ روش وزن‌دهی به اهداف
- ✓ روش اولویت مطلق
- ✓ روش معیار جامع
- ✓ روش برنامه‌ریزی آرمانی
- ✓ روش محدودیت اپسیلون
- ✓ روش بیشینه کمینه وزن‌های فازی
- ✓ روش محدودیت اپسیلون تقویت شده

روش‌های فوق بخشی از روش‌های مختلف و متنوع مسائل چند هدفه است.

۵-۵-۱- روش تبدیل تابع هدف به محدودیت

در این روش از بین توابع هدف مختلف، یکی انتخاب و سایر توابع با در نظر گرفتن مقادیری، که تصمیم گیرنده با مدل‌سازی تعیین می کند، به محدودیت تبدیل می شوند و مساله به یک مدل برنامه خطی یک هدفه تبدیل می شود و به روش معمول برنامه ریزی خطی (روش ترسیمی یا سیمپلکس) حل می شود.

مثال:

مساله‌ی زیر را با دو تابع هدف در نظر بگیرید:

$$\text{Max } f_1=6x+6y$$
$$\text{Max } f_2=20x+15y$$
St:
$$x+y \leq 20$$

---
[32] Pareto-sampling technique
[33] Aggregation selection technique
[34] ε-constraint

$2x+6y \leq 20$
$x \leq 7$
$x,y \geq 0$

اگر تابع هدف اول (f_1) معرف سود بوده و تابع هدف دوم (f_2) میزان رضایت مشتری را نشان دهد و تصمیم گیرنده تمایل دلشته باشد میزان سود حداقل ۲۸ واحد پولی باشد، با روش تبدیل تابع هدف به محدودیت، مساله را حل کنید.

حل:

تابع هدف اول به محدودیت تبدیل و تابع هدف دوم (اشتغال) بهینه می‌شود. بنابراین مساله به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\text{Max } f_2=20x+15y$$
St:
$$6x+6y \geq 28$$
$$x+y \leq 20$$
$$2x+6y \leq 20$$
$$x \leq 7$$
$$x,y \geq 0$$

اگر این مساله را حل کنیم جواب بهینه ی آن به صورت زیر خواهد بود:

$x^*=7 \quad y^*=1 \quad f^*_2=155$

۵-۵-۲- روش وزن دهی به اهداف

درروش (وزن‌دهی به اهداف) تصمیم‌گیرنده به اهداف مختلف وزن (ضریب اهمیت) اختصاص می دهد و سپس توابع هدف را در وزن‌های مربوطه ضرب و در نهایت، واحدی به وجود می آورد.

در وزن‌دهی به اهداف چند نکته مهم است:

۱- وزن هر هدف W_i مقداری بین صفر و یک است و جمع وزن‌ها باید یک شود ($\sum W_i=1$).
۲- تمامی توابع هدف به صورت Max یا Min باشند .
۳- ضرایب متغیرهای تصمیم در هر تابع هدف با تابع هدف دیگر باید هم مقیاس باشند و بنابراین دارای یک رده و بزرگی باشند.

در مورد نکته اول، برای مثال اگر دو تابع هدف وجود داشته باشد به طوری که اولی ۵ برابر دومی مهم باشد وزن هر هدف به صورت زیر حساب می شود:

$W_1=\frac{5}{5+1}=0/83 \quad , \quad W_2=\frac{1}{5+1}=0/17$

در مورد نکته‌ی دوم، اگر تابع هدف به صورت Min و دیگری به صورت Max باشد، می‌توان هدف Min را با ضرب آن در یک علامت منفی به Max تبدیل کرد تا هر دو هدف Max باشند.

$\text{Min } f \Longrightarrow \text{Max}(-f)$

اما در مورد نکته‌ی سوم، اگر ضرایب دارای یک مقیاس اندازه‌گیری نباشند، اساساً قابل جمع نیستند. برای نمونه جمع مقادیر سود و مقادیر میزان رضایت، بی مفهوم است. در این حالت لازم است ضرایب هر تابع هدف را بهنجار کرد، یعنی هر یک از ضرایب تابع هدف را بر مجموع ضرایب آن تابع تقسیم کرد.

مثال:

شرکتی تولید کننده دو خودروی نوع A و B است که قصد تصمیم گیری در مورد میزان تولید هر کدام از این خودرو ها را دارد.خودروی A نسبت به خودروی B دارای متقاضی بیشتری است. سود مورد نظر هر واحد خودرو نوع A و Bبه ترتیب ۷۰۰۰ و ۵۰۰۰ واحد پولی است. هر واحد خودرو A، ۵ برابر هر واحد B زمان می برد. اگر تمام خودروها ی تولیدی نوع B باشد، شرکت می تواند ۸۰۰ واحد از آن را تولید کند. با توجه به موجودی مواد اولیه، جمع تولید روزانه‌ی این دو خودرو نمی تواند از ۶۰۰ واحد بیشتر باشد. فرض براین است که هر چقدر خودرو تولید شود به فروش می رسد. مدیر شرکت در پی تحقیق دو هدف زیر است :

۱) کسب سود حداکثر

۲) حداکثر کردن تولید A

در وهله ی نخست، مدل برنامه‌ریزی خطی چند هدفه برای این مساله‌ی تولید، بافرض اینکه هدف سود 4 برابر هدف تولید A اهمیت داشته باشد، با روش وزن دهی به اهداف، مساله را حل کنید.

حل:

اگر x و y به ترتیب میزان تولید خودروی A و B تعریف شود، مدل برنامه‌ریزی خطی چند هدفه برای این مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Max } f_1=۷۰۰۰x+۵۰۰۰y$$
$$\text{Max } f_2=x$$
St:
$$5x+y\leq 800$$
$$x+y\leq 600$$
$$x,y\geq 0$$

با توجه به اینکه هدف اول ۴ برابر هدف دوم اهمیت دارد، پس:

$$W_1=\frac{4}{4+1}=0/80 \qquad , \qquad W_2=\frac{1}{4+1}=0/20$$

نکته‌ی دیگر در این مثال این است که واحد های دو هدف مورد نظر، با هم تفاوت دارند و اولی از نوع واحد پولی و دومی از نوع تعداد می باشد که این دو هدف با هم قابل جمع نیستند. برای این منظور ضرایب متغیرهای تابع هدف اول را بهنجار می کنیم.(به دلیل این که جمع ضرایب متغیرهای تابع هدف دوم، برابر یک است، این کار برای تابع هدف دوم لازم نیست) یعنی آن را بر ۱۲۰۰۰ تقسیم می کنیم:

$$F_1=7000x+5000y \qquad f_1=\frac{7}{12}x+\frac{5}{12}y$$

حالا می‌توان با توجه به وزن‌های مورد نظر، دو تابع را ترکیب کرد:

$$\text{Max } Z=0/8\left(\frac{7}{12}x+\frac{5}{12}y\right)+0/2\,y$$
$$=0/667x+0/333y$$

بنابراین، مساله به یک مدل برنامه ریزی یک هدفه تبدیل می شود:

$$\text{Max } Z=0/667x+0/333y$$
St:
$$5x+y\leq 800$$
$$x+y\leq 600$$

$x,y \geq 0$

با حل این مدل، جواب نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$x=50$, $y=550$, $Z=216/45$

حال اگر x و y را در توابع هدف اول و دوم قرار دهیم، میزان هدف اول و دوم به دست می آید:

$F_1=7000(50) + 5000(550)=3,100,000$

$F_2 = 50$

روش مجموع وزن‌دار با نرمال سازی فازی

روش های زیادی برای حل مسائل تصمیم گیری چند هدفه وجود دارد. یکی از این روش ها، روش مجموع وزن دار[۳۵] می باشد. در ابتدا هر تابع هدف را به طور جداگانه بهینه سازی کرده و راه حل ایده‌آل منفی (بدترین راه حل) و راه حل ایده آل مثبت(بهترین راه حل) از آنها یافت می شود. زیرا مقادیر تابع هدف Zi با $i=1,\dots,q$ در مقیاس های مختلف باهم متفاوت است. برای نرمال سازی توابع هدف، از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$f_i' = \begin{cases} \dfrac{NIS_{fi} - Zi}{NIS_{fi} - PIS_{fi}} & \text{برای تابع هدف مینیمم} \\ \dfrac{Zi - NIS_{fi}}{PIS_{fi} - NIS_{fi}} & \text{برای تابع هدف ماکزیمم} \end{cases}$$

حال f_i' مقدار نرمال سازی شده از تابع هدف i ام است. NISi ایده آل منفی تابع هدف iام است و PISi ایده آل مثبت تابع هدف iام است. سپس به هر یک از توابع هدف نرمال شده یک وزن Wi که به وسیله فرایند تحلیل سلسه مراتبی فازی برای هر یک از توابع هدف تعیین شده است تخصیص داده می شود. . بعد از آن با جمع زدن توابع هدف وزن دار با هم، مدل موجود به تابع تک هدفه به شکل رابطه زیر تبدیل می شود:

$$Max(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f_i'$$

۵-۵-۳ روش اولویت مطلق

گاهی تصمیم گیرنده تمایل ندارد که وزن هر هدف را مشخص کند و روش وزن دهی به اهداف را روشی ذهنی می پندارند. ولی مایل است اهداف را اولویت بندی کند. در این صورت روش اولویت مطلق مطرح می شود. در این روش مساله را تنها با هدفی که اولویت اول (مهم تر) دارد ، حل می کنیم و جواب بهینه را مشخص می کنیم. در مرحله ی بعد تابع هدف اولویت

[35] Weighted sum method

اول را، برابر جواب بهینه به دست آمده قرار داده و به عنوان یک محدودیت به مساله اضافه کرده و مساله را با در نظر گرفتن تابع هدف با اولویت دوم حل می کنیم . این رویه به همین صورت برای اولویت های بعدی تکرار می شود .

مثال : مساله برنامه ریزی خطی چند هدفه زیر را در نظر بگیرید (هدف اول حداقل کردن ریسک و هدف دوم حداکثر کردن سود است).

$$\begin{aligned}
&\text{MIN } F_1=0/667x+0/333y\\
&\text{Max } F_2=12x+3y\\
&\text{St:}\\
&5x+4y \le 1300\\
&x \le 600\\
&y \le 600\\
&x \ge 50\\
&y \ge 50
\end{aligned}$$

اگر اولویت اول، تابع هدف دوم و اولویت دوم، تابع هدف اول باشد. با روش اولویت مطلق مساله را حل کنید.

ابتدا مساله با توجه به تابع اولویت اول (سود) حل می شود:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } F_2=12x+3y\\
&\text{St:}\\
&5x+4y \le 1300\\
&x \le 600\\
&y \le 600\\
&x \ge 50\\
&y \ge 50
\end{aligned}$$

جواب بهینه‌ی این مساله ی تک هدفه به صورت زیر خواهد بود:

$x=220 \quad , \quad y=50 \quad , f_2=2790$

حال تابع هدف با اولویت اول (f_2) به یک محدودیت تبدیل می شود:

$f_2=2790 \quad \longrightarrow \quad 12x+3y=2790$

حال این محدودیت به مساله‌ی اصلی اضافه شده و با در نظر گرفتن تابع هدف با اولویت دوم (f_1) مساله حل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } F_1=8x\\
&\text{St:}\\
&5x+4y \le 1300\\
&x \le 600\\
&y \le 600\\
&x \ge 50\\
&y \ge 50\\
&12x+3y=2790
\end{aligned}$$

با توجه به این که هدف با اولویت اول، به عنوان یک محدودیت به مساله تحمیل شده است بنابراین در حل مساله، جواب‌های x وy در این صادق خواهد بود. با حل این مساله جواب به صورت زیر بدست می آید:

$x=220 \quad , \quad y=50 \quad , f_1=1760$

بنابراین با توجه به این که $f_2=2790$ بدست آمد، جواب نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$x=220$, $y=50$, $f_2=2790$, $f_1=1760$

۴-۵-۵ روش معیار جامع

در این روش بر خلاف روش های قبلی نیازی به اولویت بندی اهداف ، وزن دهی ، یا تبدیل اهداف به محدودیت نیست . روش معیار جامع ، بسته به مورد ، مجموع توان اول، دوم،... انحرافات نسبی اهداف از مقدار بهینه شان را حداقل می کند.

در این روش ، تابع هدف که همواره حداقل نمودن آن مورد توجه است به صورت زیر تعریف می شود:

$$Min\left[\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i^*(x)-f_i(x)}{f_i^*(x)}\right]^p\right]$$

که در آن f^*_1 مقدار بهینه ی تابع هدف i ام(بدون در نظر گرفتن اهداف دیگر) است، پیشنهاد های مختلفی برای مقدار p وجود دارد. برخی $P=1$ را مناسب می دانند(یعنی مجموع نسبی انحرافات حداقل شود) و برخی نیز $P=2$ را مناسب تر می دانند(یعنی مجموع توان دوم انحرافات حداقل شود).

مثال :

همان مثال خودرو را در نظر بگیرید که مدل چند هدفه‌ی آن در زیر آورده شده است:

Max $f_1=$۷۰۰۰x +۵۰۰۰y

Max $f_2= x$

St:

$5x + y \leq 800$

$x+y \leq 600$

$x,y \geq 0$

با استفاده از روش معیار جامع و به ازای $P=1$ و همچنین $P=2$ مساله را حل کنید.

حل:

ابتدا دو مساله برنامه‌ریزی خطی یک هدفه زیر حل می شود:

مساله ۱

Max $f_1=$۷۰۰۰x +۵۰۰۰y

St:

$5x + y \leq 800$

مساله ۲

Max $f_2= x$

St:

$5x + y \leq 800$

$x + y \leq 600$

$x,y \geq 0$

$x+y \leq 600$

$x,y \geq 0$

جواب بهینه مسئله ۱:
$X=50 \;\; y=550 \;\; f_1=3{,}100{,}000$

جواب بهینه مساله ۲
$x=160 \,,\; y=0 \,,\; f_2=160$

اکنون می توان تابع هدفی جهت حداقل کردن مجموع انحرافات نسبی تنظیم کرد و بر اساس آن و با توجه به محدودیت‌ها، مساله را حل کرد.

حالت اول: ($P=1$ ، مجموع انحرافات نسبی حداقل شود)

$$\text{Min } Z=\left(\frac{3{,}100{,}000-(7000x+5000y)}{3{,}100{,}000}\right)^2+\left(\frac{160-x}{160}\right)^2$$

St:

$$5x+y \le 800$$
$$x+y \le 600$$
$$x,y \ge 0$$

که جواب نهایی آن به صورت زیر خواهد بود:

$x=160 \;,\; y=0 \;\; f_1=1{,}120{,}000 \;,\; f_2=160$

حالت دوم : ($P=2$ مجموع توان دوم انحراف نسبی حداقل شود)

$$\text{Min } z=\left(\frac{3{,}100{,}000-(7000x+5000y)}{3{,}100{,}000}\right)^2+\left(\frac{160-x}{160}\right)^2$$

St:

$$5x+y \le 800$$
$$x+y \le 600$$
$$x,y \ge 0$$

در این مدل تابع هدف، غیر خطی است. که حل آن در بحث ما نمی گنجد. (برای آشنایی با حل این مدل می توان به کتاب برنامه ریزی غیر خطی مراجعه کرد).

۵-۵-۵ برنامه ریزی آرمانی

برنامه ریزی آرمانی یکی از مدل‌های برنامه ریزی چند هدفه است. بنابراین آن را به صورت کامل شرح می دهیم. آرمان ها(اهدافی) که یک سازمان درصدد نیل به آن‌هاست، بسته به نوع سازمان متنوع است. در مطالعه‌ای از مدیران عامل ۲۵ شرکت خواسته شده است که اهداف شرکت را از بین مجموعه‌ی متنوعی از اهداف اقتصادی، سیاسی، اجتماعی، اخلاقی و ... مشخص کنند. نتیجه‌ی این مطالعه نشان می دهد که هر شرکت بیش از یک هدف را تعقیب می کند. توزیع فراوانی اهداف اولیه به قرار جدول زیر است:

در عمل، به دلیل وجود چند هدف، مدیران در بسیاری از تصمیم‌ها به جای جستجوی یک جواب بهینه، به دنبال دستیابی به یک جواب رضایت بخش هستند. ضمناً شرایط و محدودیت‌ها به دنبال دستیابی به یک جواب رضایت بخش می باشند. ضمناً شرایط و

محدودیت ها در دنیای واقعی همیشه خشک و سخت نیستند؛ به‌طوری که هیچ‌گونه انحراف و مغایرتی از آن‌ها ممکن نباشد، بلکه در بسیاری از موارد، به خصوص زمانی که بده- بستان (موازنه) مجاز باشد، امکان تخطی از آن‌ها قابل قبول خواهد بود.

اهداف اولیه	فراوانی
کارکنان	۲۱
مسئولیت در قبال جامعه	۱۹
نیازهای مشتریان	۱۹
منافع سهامداران	۱۶
سود	۱۳
کیفیت محصول	۱۱
پیشرفت فناوری	۹
روابط با عرضه‌کنندگان	۹
رشد شرکت	۸
کارایی مدیریتی	۷
وظایف نسبت به دولت	۴
روابط با خرده فروشان	۴
وجهه‌ی اجتماعی	۲

در برنامه ریزی خطی (LP) امکان تخطی از محدودیت ها وجود ندارد. حتی با وجود یک هدف، در بعضی از مسایل رعایت تمامی محدودیت‌های خشک موجب می‌شود که مساله فاقد منطقه‌ی موجه و بنابراین فاقد جواب باشد.

برنامه‌ریزی آرمانی (GP)، رویکردی است که به کمک آن می توان بر دو مشکل فوق (یک هدفه بودن محدودیت‌های خشک) فائق شد. قبل از معرفی تفاوت بین مسائلی که می‌توان از طریق این دو رویکرد، یعنی برنامه ریزی خطی و برنامه‌ریزی آرمانی آن ها را حل نمود، آن ها را بررسی می کنیم.

برنامه ریزی خطی دارای ساختاری با یک هدف است که به دنبال بهینه کردن آن است. در هنگام مدل‌سازی LP یا یک هدف وجود دارد، یا در صورت وجود چند هدف، یکی از آنها در تابع هدف آورده می‌شود و بقیه در قالب محدودیت‌ها نمایش داده می‌شود. برای مثال اگر هدف، کسب حداکثر سود باشد و سهم بازار به میزان حداقل ۲۰درصد نیز مورد توجه باشد، سود در تابع هدف و سهم بازار حداقل ۲۰درصد در محدودیت‌ها ذکر می‌شود. به دلیل این که بسیاری از سازمان‌ها چند هدف را تعقیب می کنند که گاهی این اهداف در تعارض با یکدیگر هستند، مشخص کردن این‌که کدام یک باید حداکثر(یا حداقل) و کدام یک به‌عنوان محدودیت تعریف شود، کار مشکلی خواهد بود.

مشکل دیگری که برنامه‌ریزی خطی دارد، انعطاف‌پذیری آن است. حتی اگر یک هدف در محدودیت قرار گیرد امکان تخطی از آن هرگز میسر نخواهد بود. برای مثال اگر سهم بازار حداقل ۲۰درصد در محدودیت قرار گیرد، سهم بازاری به میزان ۱۹/۹۹ درصد غیر موجه خواهد بود، بدین جهت دست تصمیم گیرنده را در انتخاب جواب می بندد.

در جدول زیر تفاوت‌های عمده بین LP و GP مشخص شده است. برنامه‌ریزی آرمانی رویکردی متفاوت با برنامه‌ریزی خطی ارائه می کند که در آن چند هدف (آرمان) متضاد می توانند مورد نظر قرار گیرند.

شرح	LP	GP
اهداف	یک هدف اولیه- که باید حداکثر یا حداقل باشد.	تمامی اهداف (آرمان‌ها) رتبه بندی می شوند.
محدودیت‌ها	انعطاف ناپذیر، هیچ‌گونه انحرافی مجاز نیست.	منعطف، انحراف‌ها قابل قبول بوده و محدودیت‌ها شل می‌شوند.
هدف	حداکثر(حداقل) کردن تابع هدف اولیه	حداقل کردن مجموع انحراف‌های نا مطلوب که بر حسب اهمیت‌شان وزن گرفته اند
مقصود	بهینه سازی	رضایت بخشی
برنامه‌های رایانه‌ای	خیلی کارا، بسته‌های نرم‌افزاری مختلف	غیر کارا، معدودی بسته‌های نرم افزاری
کاربردها	زیاد و متنوع	در حال افزایش

ایده‌ی اصلی برنامه‌ریزی آرمانی

گرچه GP شکل توسعه یافته‌ای از LP است، ولی چیزی بیش از یک توسعه‌ی صرف است، چرا که قادر است آرمان‌های مختلف را مورد نظر قرار دهد. هم‌چنین انحراف از آرمان‌ها را مجاز می داند و از این‌رو انعطاف‌پذیری را در فرایند تصمیم‌گیری ایجاد می کند. سر انجام این امکان را فراهم می کند که ترجیحات تصمیم گیرنده در مورد اهداف چند گانه و متضاد در نظر گرفته شود.

برنامه ریزی آرمانی را می توان برای سه نوع تحلیل استفاده کرد:

۱. تعیین منابع لازم برای تحقق مجموعه‌ای از اهداف مورد نظر.
۲. تعیین درجه‌ی تحقق اهداف با توجه به منابع موجود.
۳. تعیین بهترین جواب رضایت‌بخش با توجه به مقدار منابع موجود و اولویت اهداف.

مفاهیم برنامه ریزی آرمانی

شالوده‌ی GPبراساس سه مفهوم است: الف) انحراف‌ها ب) اولویت‌ها، وزن‌ها و آرمان‌ها ج) ابعاد اهداف، در ادامه هر یک از این سه را به طور مختصر توضیح می دهیم.

انحراف‌ها

انحرافها مقادیری هستند که آرمان‌ها از مقدار مورد نظر خود کمتر (یا بیشتر) محقق شده‌اند.

انحراف های بیشتر محقق، میزانی را اندازه‌گیری می کنند که بیشتر از مقدار آرمان است. این انحراف را با متغیر d^{+}_{i} نشان می دهیم.

انحراف های کمتر محقق، میزانی را اندازه‌گیری می کنند که کمتر از مقدار آرمان بوده است. این انحراف را با متغیر d^{-}_{i} نشان می دهیم. انحراف می تواند مطلوب یا نا مطلوب باشد. در تمام موارد روابط زیر را مشاهده می کنیم:

انحراف‌های نامطلوب	نوع محدودیت
d^{-}_{i}	$\geq$
d^{+}_{i}	$\leq$
d^{+}_{i} و d^{-}_{i}	=

بر طبق تعریف مان، کمتر محقق، زمانی نا مطلوب است که با محدودیت $\geq$ مواجه باشیم. هم چنین بیشتر محقق، هنگامی نامطلوب است که با محدودیت $\leq$ مواجه شویم. در حالت = هم بیشتر و هم کمتر محقق نامطلوب تلقی می شوند.

اولویت بندی آرمان‌ها

آرمان‌ها را در GP به سه روش متفاوت می توان اولویت بندی کرد : ترتیبی ، اصلی و ترکیبی از این دو.

الف) رتبه بندی ترتیبی : در این روش آرمان‌ها بر حسب اهمیت‌شان فهرست می شوند.

ب)رتبه بندی اصلی : در این روش وزن مشخصی به هر یک از انحرافات داده می شود. این وزن‌ها اهمیت نسبی هر انحراف را نشان می دهند.

ج) ترکیبی از این دو: این روش برای زمانی است که تابع هدف معرفی شود.

ابعاد آرمان‌ها

هر تابع هدف مدل GP به دنبال آن است که مجموع انحراف‌های نامطلوب موزون را بر حسب اهمیت‌شان حداقل کند. با این وجود اگر ابعاد (مقیاس) هر آرمانی با دیگری متفاوت باشد چنین حاصل جمعی ممکن است مورد توجه نباشد.

۵-۵-۳ ساختار برنامه ریزی آرمانی

مدل GP از چهار جزء تشکیل می شود :

الف) متغیرهای تصمیم

ب) محدودیت‌های سیستمی

ج) محدودیت‌های آرمانی

د) تابع هدف

در ادامه به توضیح هر یک خواهیم پرداخت:

الف) متغیرهای تصمیم: متغیرهای تصمیم مدل GP همانند متغیرهای تصمیم مدل LP هستند. متغیرهای تصمیم، متغیرهایی هستند که تصمیم گیرنده در صدد تعیین مقدار آن‌هاست.

ب) محدودیت‌های سیستمی: محدودیت های سیستمی مدل GP همانند محدودیت‌های مدل LP هستند، یعنی امکان تخطی از چنین محدودیت‌هایی وجود ندارد و جواب مسئله (مقدار متغیرهای تصمیم) باید در آن صدق کند.

ج) محدودیت‌های آرمانی: محدودیت‌های آرمانی، سطوح مورد نظر از هر هدف را نشان می دهند.

د) تابع هدف: تابع هدف در مدل GP به گونه‌ای تهیه می شود که مجموع وزنی انحراف‌های نامطلوب را حداقل کند. بدین جهت، ساختار تابع هدف بستگی به سیستم وزن دهی به آرمان‌ها دارد.

مدل سازی برنامه ریزی آرمانی

برای آشنایی با نحوه مدل سازی مسائل برنامه ریزی آرمانی، به مثال زیر توجه کنید.

مثال:

یک شرکت خودروسازی قصد دارد برای تبلیغات از محصولات خود از رسانه های جمعی استفاده کند. این شرکت برای این کار تلویزیون ورادیو را مدنظر خود قرار داده است. چالش پیش روی این شرکت این است که طوری بودجه بندی خود را انجام دهد که تمام آرمان‌های زیر رعایت شود:

آرمان ۱ : حداکثر مبلغ هزینه‌ی تبلیغات ۵۰ میلیون تومان باشد. این اصلی‌ترین آرمان با اولویت P_1 می باشد.

آرمان ۲ : کل افرادی که با این آگهی مواجه می شوند کمتر از ۳۰ میلیون نفر نباشند. این آرمان اولویت دوم را دارد که P_2 نامیده می شود.

آرمان ۳ : کل افرادی که با این آگهی مواجه می شوند و تحت تاثیر قرار می گیرند حداقل ۸ میلیون نفر باشند. این آرمان P_3 نامیده می شود.

آرمان ۴ : حداقل ۱۵ بار این آگهی از تلویزیون پخش شود. (هزینه هر بار پخش این آگهی در تلویزیون ۴ میلیون تومان می باشد). این آرمان P_4 نامیده می شود.

آرمان ۵ : حداقل ۷ بار این آگهی از رادیو پخش شود. (هزینه هر بار پخش این آگهی در تلویزیون ۲ میلیون تومان می باشد). این آرمان P_5 نامیده می شود.

یک آگهی در تلویزیون به طور متوسط ۳/۵ میلیون مخاطب دارد که از بین آنها ۱/۲۰۰/۰۰۰ نفر تحت تاثیر قرار می گیرند، و در رادیو به طور متوسط ۱/۵ میلیون که ۴۰۰۰۰۰ نفر تحت تاثیر قرار می گیرند. چالش پیش روی این شرکت این است که در هر رسانه چند بار آگهی صورت گیرد به گونه‌ای که آرمان های فوق رعایت شود.

حل:

در وهله ی اول باید متغیرهای تصمیم مساله را مشخص کنیم:

تعداد آگهی که باید در تلویزیون داده شود=x

تعداد آگهی که باید در رادیو داده شود=y

در مرحله بعدی باید محدودیت های آرمان ها را بنویسیم:

۱. $4x + 2y + d_1^- - d_1^+ = 50$

۲. $3.5x + 1.5y + d_2^- - d_2^+ = 30$

۳. $1.2x + 0.4y + d_3^- - d_3^+ = 8$

۴. $x + d_4^- - d_4^+ = 15$

۵. $y + d_5^- - d_5^+ = 7$

در مرحله‌ی سوم باید محدودیت‌های سیستمی نوشته شود و از آنجایی که متغییرهای تصمیم که تعداد آگهی را نشان می دهند غیر منفی و عدد صحیح هستند. داریم:

$$x,y \geq 0 \text{ , int}$$

در مرحله آخر هم باید تابع هدف نوشته شود که از نظر آرمان اول d_1^+ نامساعد است و از نظر آرمان‌های بعدی به ترتیب $d_5^-, d_4^-, d_3^-, d_2^-$ نامطلوبند. بنابراین تابع هدف این مساله به شکل زیر خواهد در آمد :

$$\text{Min } Z = p_1d_1^+ + p_2d_2^- + p_3d_3^- + p_4d_4^- + p_5d_5^-$$

برنامه‌ریزی آرمانی خود دارای چندین روش می‌باشد که می‌توان به نمونه‌های زیر اشاره کرد:

- برنامه‌ریزی آرمانی وزنی[۳۶]
- برنامه‌ریزی آرمانی لکسیکوگرافیک[۳۷]
- برنامه‌ریزی آرمانی چبیشف[۳۸]
- برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای[۳۹]
- برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ایِ تجدیدنظر شده[۴۰]
- برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای نسبتی[۴۱]

در ادامه هر یک از این روش‌ها را توضیح می‌دهیم.

۵-۵-۵-۱-برنامه‌ریزی آرمانی وزنی

مدل کلی روش برنامه‌ریزی آرمانی وزنی به صورت زیراست:

$$\text{Min } \sum_{i=۱}^{n} W_i \left(d_i^+ + d_i^-\right)$$

$$s.t.$$

$$h_k(X) = (\leq \text{ or } \geq)۰ \qquad k = ۱,۲,...,q$$

$$f_i(X) - d_i^+ + d_i^- = b_i \qquad i = ۱,۲,...,n$$

$$d_i^+, d_i^- \geq ۰ \qquad i = ۱,۲,...,n$$

که در آرمان‌های نوع سود، انحرافات منفی و در آرمان‌های نوع هزینه، انحرافات مثبت باید به حداقل برسند. $h_k(X)$ محدودیت k ام سیستم و $f_i(X)$ هدف i ام می‌باشند. b_i سطح انتظار هدف i ام و d_i^+ انحراف‌های مثبت و d_i^- انحراف‌های منفی از مقدار سطح انتظار (آرمان) i ام می‌باشند که به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

[36] Weighted goal programming (WGP)
[37] Lexicographic goal programming (LGP)
[38] Chebyshev (min-max) goal programming
[39] Multi-choice goal programming (MCGP)
[40] Revised multi-choice goal programming (RMCGP)
[41] Percentage multi-choice goal programming

$$d_i^- = \begin{cases} b_i - f_i(X) & \text{if } f_i(X) < b_i \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$d_i^+ = \begin{cases} f_i(X) - b_i & \text{if } f_i(X) > b_i \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

همچنین، W_i ضرایب وزنی مثبتی هستند که اهمیت هر یک از آرمان‌ها را نسبت به سایر آرمان‌ها تعیین می‌کنند که $\sum_i W_i = ۱$

مثال- مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max} = ۵X_۱ + X_۲$$
$$\text{Max} = ۳X_۱ + ۴X_۲$$
$$s.t.$$
$$۲X_۱ + X_۲ \le ۶۰$$
$$X_۱ \le ۱۵$$
$$X_۲ \le ۳۰$$
$$X_۱, X_۲ \ge ۰$$

در مثال ساده بالا امکان بهینه‌سازی همزمان دو تابع هدف وجود ندارد؛ بنابراین قصد داریم با ابزار برنامه‌ریزی آرمانی به صورت همزمان، توابع هدف را تا جایی که امکان دارد بهینه کنیم. ابتدا باید اعدادی را به عنوان سطوح انتظار برای توابع هدف، در نظر بگیریم. معمولاً این اعداد را مدیران یا تصمیم‌گیرندگان تخمین می‌زنند. برای مثال تصمیم‌گیرنده مقدار سطح انتظار ۱۰۰ واحد را برای تابع هدف اول و مقدار ۱۶۵ واحد را برای تابع هدف دوم در نظر می‌گیرد. لذا، شکل مساله برنامه‌ریزی آرمانی وزنی برای مساله فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{Min } W_۱\left(d_۱^+ + d_۱^-\right) + W_۲\left(d_۲^+ + d_۲^-\right)$$
$$s.t.$$
$$۲X_۱ + X_۲ \le ۶۰$$
$$X_۱ \le ۱۵$$
$$X_۲ \le ۳۰$$
$$X_۱, X_۲ \ge ۰$$
$$۵X_۱ + X_۲ - d_۱^+ + d_۱^- = ۱۰۰$$
$$۳X_۱ + ۴X_۲ - d_۲^+ + d_۲^- = ۱۶۵$$
$$d_۱^+, d_۱^-, d_۲^+, d_۲^- \ge ۰$$

همان طور که مشاهده می‌کنید، مساله دو هدفه ی ارائه شده، تبدیل به یک مساله تک هدفه شد که قابلیت حل به وسیله الگوریتم‌های تک هدفه ای نظیر الگوریتم سیمپلکس را دارا می‌باشد.

۵-۵-۵-۲- برنامه‌ریزی آرمانی لکسیکوگرافیک

زمانی که از نظر تصمیم‌گیرنده اهداف دارای درجه اهمیت مختلف باشد و توابع هدف به صورت رتبه‌ای در نظر گرفته شود، می‌توان از برنامه‌ریزی آرمانی لکسیکوگرافیک استفاده نمود. شکل کلی برنامه‌ریزی آرمانی لکسیکوگرافیک به صورت زیر است:

$$\text{Lex Min } \lambda = \left[\sum_{i=h_1}^{n} W_i \left(d_i^+ + d_i^-\right), \ldots, \sum_{i=h_j}^{n} W_i \left(d_i^+ + d_i^-\right), \ldots, \sum_{i=h_J}^{n} W_i \left(d_i^+ + d_i^-\right) \right]$$

$$\begin{aligned} & s.t. \\ & h_k(X) = (\le \text{ or } \ge)0 \qquad k = 1,2,\ldots,q \\ & f_i(X) - d_i^+ + d_i^- = b_i \qquad i \in h_j,\ j = 1,2,\ldots,J \\ & d_i^+, d_i^- \ge 0 \qquad j = 1,2,\ldots,J \end{aligned} \qquad (۳-۲)$$

که h_j اندیس آرمان‌هایی است که در jامین رتبه (اولویت) قرار دارند.

۵-۵-۵-۳- برنامه‌ریزی آرمانی چبیشف

این روش در تلاش برای کمینه سازی حداکثر انحرافات هر تابع هدف می‌باشد. به همین دلیل این روش به نام برنامه‌ریزی آرمانی Min-Max هم گفته می‌شود. شکل کلی این روش به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & \text{Min } D \\ & s.t. \\ & h_k(X) = (\le \text{ or } \ge)0 \qquad k = 1,2,\ldots,q \\ & f_i(X) - d_i^+ + d_i^- = b_i \qquad i = 1,2,\ldots,n \\ & D \ge \sum_{i=1}^{n} W_i \left(d_i^+ + d_i^-\right) \\ & d_i^+, d_i^- \ge 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \qquad (۳-۳)$$

که D یک متغیر پیوسته است که میزان حداکثری انحرافات را اندازه می‌گیرد.

۵-۵-۵-۴- برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای

همان طور که بیان شد، برنامه‌ریزی آرمانی در مقایسه با برنامه‌ریزی خطی قادر است آرمان‌های مختلف را مد نظر قرار داده و انحراف از آرمان‌ها را مجاز بداند و از این رو در فرایند تصمیم‌گیری، انعطاف پذیری ایجاد می‌کند. نگرش‌های استاندارد برنامه‌ریزی آرمانی، به یافتن یک جواب نزدیک به سطح انتظار آن تابع هدف، تاکید کرده و انحرافات به وجود آمده از سطح انتظار هر تابع هدف را، کمینه می‌کند. با این حال، در عمل، تعیین یک سطح انتظار محافظه‌کارانه ی اولیه برای تصمیم‌گیرنده بر اساس اطلاعات موجود و محدودیت منابع برای هر تابع هدف، بسیار سخت است. برای غلبه بر چنین مشکلی، چانگ در سال ۲۰۰۷ میلادی یک

روش جدید به نام برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای را برای مسائل تصمیم‌گیری چند هدفه با چندین سطح انتظار برای هر آرمان پیشنهاد داد. روش برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای به تصمیم‌گیرنده اجازه می‌دهد یک مجموعه سطح انتظار را برای هر آرمان ارائه نماید. مسئله برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{Min} \sum_{i=1}^{n} W_i \left| f_i(X) - g_{i1} \text{ or } g_{i2} \text{ or } \dots g_{im} \right| \\ &s.t. \\ &h_k(X) = (\leq \text{or} \geq) 0 \qquad k = 1, 2, \dots, q \end{aligned} \tag{۴-۳}$$

که $g_{ij}(i = 1, 2, \dots, n \text{ and } j = 1, 2, \dots, m)$ بیانگر j امین سطح انتظار برای i امین آرمان است، به‌طوری که:

$$g_{ij-1} \leq g_{ij} \leq g_{ij+1}$$

برای درک بهتر، این نوع روش را به سه حالت تقسیم می‌نماییم:

الف) برنامه‌ریزی با یک سطح انتظار برای هر تابع هدف؛ این حالت همان برنامه‌ریزی آرمانی وزنی است که قبلاً توضیح داده شد.

ب) برنامه‌ریزی با دو سطح انتظار برای هر تابع هدف؛ در این نوع برنامه‌ریزی، اگر تصمیم‌گیرنده برای هر تابع هدف دو سطح انتظار تعیین نماید، همه پارامترها مثل برنامه‌ریزی آرمانی وزنی است با این تفاوت که سطح انتظار بهینه به کمک متغیرهای صفر و یک انتخاب می‌شود. مدل کلی عبارت است از:

$$\begin{aligned} &Min \sum_{i=1}^{n} W_i \left(d_i^+ + d_i^- \right) \\ &s.t. \\ &h_k(X) = (\leq \text{or} \geq) 0 \qquad k = 1, 2, \dots, q \\ &f_i(X) - d_i^+ + d_i^- = g_{i1} Z_i + g_{i2}(1 - Z_i) \qquad i = 1, 2, \dots, n \\ &d_i^+, d_i^- \geq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n \\ &Z_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{۵-۵}$$

Z_i یک متغیر صفر و یک است که جهت انتخاب سطح انتظار مطلوب آرمان i ام استفاده می‌شود. همچنین g_{i1} و g_{i2} سطوح انتظار آرمان i ام هستند.

ج) برنامه‌ریزی با سه سطح انتظار برای هر تابع هدف؛ اگر تصمیم‌گیرنده برای هر تابع هدف سه سطح انتظار تعیین نماید، مدل کلی عبارت است از:

$$\begin{aligned} &Min \sum_{i=1}^{n} W_i \left(d_i^+ + d_i^- \right) \\ &s.t. \\ &h_k(X) = (\leq \text{or} \geq) 0 \qquad k = 1, 2, \dots, q \end{aligned} \tag{۶-۵}$$

$$f_i(X)-d_i^+ + d_i^- = g_{i۱}Z_{i۱}Z_{i۲}+g_{i۲}Z_{i۲}(۱-Z_{i۲})+g_{i۳}Z_{i۲}(۱-Z_{i۱}) \qquad i=۱,۲,...,n$$

$$d_i^+, d_i^- \geq ۰ \qquad i=۱,۲,...,n$$

$$Z_i \in \{0,1\} \qquad i=۱,۲,...,n$$

مثال- مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$f_۱ : ۳x_۱+۲x_۲+x_۳ = ۱۰۰ \text{ or } ۱۲۰$$
$$f_۲ : ۴x_۱+۳x_۲+۲x_۳ = ۸۰ \text{ or } ۱۰۰$$
$$f_۳ : ۳.۵x_۱+۵x_۲+۳x_۳ = ۷۰ \text{ or } ۹۰ \text{ or } ۱۱۰$$
$$s.t.$$
$$x_۲+x_۳ \geq ۱۰$$
$$x_۲ \geq ۴$$
$$x_۱+x_۲+x_۳ \geq ۱۵$$

با توجه به مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای، مساله ی فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\text{Min } Z = d_۱^+ + d_۱^- + d_۲^+ + d_۲^- + d_۳^- + d_۳^+$$
$$s.t.$$
$$۳x_۱+۲x_۲+x_۳-d_۱^+ + d_۱^- = ۱۰۰z_۱+۱۲۰(۱-z_۱)$$
$$۴x_۱+۳x_۲+۲x_۳-d_۲^+ + d_۲^- = ۸۰z_۲+۱۰۰(۱-z_۲)$$
$$۳.۵x_۱+۵x_۲+۳x_۳-d_۳^+ + d_۳^- = ۷۰z_۳z_۴+۹۰z_۳(۱-z_۴)+۱۱۰(۱-z_۳)z_۴$$
$$x_۲+x_۳ \geq ۱۰$$
$$x_۲ \geq ۴$$
$$x_۱+x_۲+x_۳ \geq ۱۵$$
$$d_i^+, d_i^- \geq ۰ \quad (i=۱,۲,۳)$$
$$z_۱, z_۲, z_۳, z_۴ \in \{۰,۱\}$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

پس از حل به کمک نرم‌افزار لینگو جواب بهینه به صورت $(x_۱,x_۲,x_۳)=(۱۷.۷۷,۸.۸۸,۱.۱۱)$ و $(z_۱,z_۲,z_۳,z_۴)=(۱,۰,۰,۱)$ به دست خواهد آمد. طبق نتایج، تابع هدف اول برابر ۷۲.۲، تابع هدف دوم دقیقاً برابر سطح دوم آرمان مربوطه یعنی ۱۰۰ و تابع هدف سوم دقیقاً برابر سطح سوم آرمان مورد نظر خود، یعنی ۱۱۰ شده است.

در حالت کلی، برای به‌کارگیری این مدل با n سطح انتظار می‌بایست از $\lceil \ln n / \ln 2 \rceil$ متغیر صفر- یک استفاده کرد. در مدل بالا به علت ضرب شدن حداقل دو متغیر صفر و یک، مدل غیرخطی محسوب می‌شود؛ بنابراین برای حل آن، مساله باید خطی شود.

برای گریز از خطی‌سازی متغیرهای صفر و یک می‌توان از یک روش دیگر استفاده کرد. در این روش، برای هر آرمان یک نوع متغیر

صفر و یک را وارد مساله می‌کنیم. سپس با اضافه کردن محدودیت جدید، مدل را مجبور به انتخاب فقط یکی از آن آرمان‌ها می‌کنیم. لذا، مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$
\begin{aligned}
& Min \ \sum_{i=1}^{n} W_i \left(d_i^+ + d_i^-\right) \\
& s.t. \\
& h_k(X) = (\leq \text{ or } \geq)\, 0 && k = 1,2,\ldots,q \\
& f_i(X) - d_i^+ + d_i^- = \sum_{j=1}^{m} g_{ij} Z_{ij} && i = 1,2,\ldots,n \\
& \sum_{j=1}^{G_i} Z_{ij} = 1 && i = 1,2,\ldots,n \\
& d_i^+, d_i^- \geq 0 && i = 1,2,\ldots,n \\
& Z_{ij} \in \{0,1\} && i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{۷-۵}
$$

که Z_{ij} یک متغیر صفر و یک است.

۵-۵-۵-۵- برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای تجدیدنظر شده

در برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای قسمت قبل، مشاهده کردیم که مدل‌ها حاوی متغیرهای صفر و یک متعددی بودند. با ورود متغیرهای صفر و یک به مدل، زمان حل مساله‌ها برای مسائل متوسط و بزرگ افزایش چشم‌گیری می‌یابد. برای رفع این مشکل می‌توان مدل را به‌گونه‌ای اصلاح کرد که نیاز به، به‌کارگیری متغیرهای صفر و یک کمکی نباشد. اساس کار در این روش اصلاح‌شده، بدین صورت است که به‌جای استفاده از متغیرهای صفر و یک، از یک متغیر پیوسته برای هر آرمان استفاده می‌کنیم و با توجه به نوع مساله سعی می‌کنیم انحرافات را از حد پایین و یا حد بالای سطوح انتظار حداقل نماییم (چانگ ۲۰۰۸). برای ساخت مدل باید بدانیم هر هدف از چه نوعی است. دو حالت ممکن است برای اهداف وجود داشته باشد:

حالت اول: در حالتی‌که آرمان مورد نظر هر چه بیشتر بهتر[۴۲]، مدل را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$
\begin{aligned}
& Min \ \sum_{i=1}^{n} \left[W_i \left(d_i^+ + d_i^-\right) + \alpha_i \left(e_i^+ + e_i^-\right)\right] \\
& s.t. \\
& h_k(X) = (\leq \text{ or } \geq)\, 0 && k = 1,2,\ldots,q \\
& f_i(X) - d_i^+ + d_i^- = y_i && i = 1,2,\ldots,n \\
& y_i - e_i^+ + e_i^- = g_{i.\max} && i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{۸-۳}
$$

[۴۲] The More The Better

$$g_{i.\min} \le y_i \le g_{i.\max} \qquad i = ۱,۲,...,n$$
$$d_i^+, d_i^-, e_i^+, e_i^- \ge ۰ \qquad i = ۱,۲,...,n$$

حالت دوم: در حالتی‌که آرمان مورد نظر هر چه کمتر بهتر[۴۳]، مدل را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$Min \sum_{i=۱}^{n}\left[W_i\left(d_i^+ + d_i^-\right) + \alpha_i\left(e_i^+ + e_i^-\right)\right]$$
$$s.t.$$
$$h_k(X) = (\le \text{or} \ge)۰ \qquad k = ۱,۲,...,q$$
$$f_i(X) - d_i^+ + d_i^- = y_i \qquad i = ۱,۲,...,n \qquad (۳-۹)$$
$$y_i - e_i^+ + e_i^- = g_{i.\min} \qquad i = ۱,۲,...,n$$
$$g_{i.\min} \le y_i \le g_{i.\max} \qquad i = ۱,۲,...,n$$
$$d_i^+, d_i^-, e_i^+, e_i^- \ge ۰ \qquad i = ۱,۲,...,n$$

که

$g_{i.max}$ حد بالای سطح انتظار آرمان i ام

$g_{i.min}$ حد پایین سطح انتظار آرمان i ام

y_i یک متغیر پیوسته با محدوده $g_{i.\min} \le y_i \le g_{i.\max}$

d_i^+ انحراف مثبت از $|f_i(X) - y_i|$

d_i^- انحراف منفی از $|f_i(X) - y_i|$

w_i وزن(اهمیت) انحرافات مثبت و منفی آرمان i ام

α_i وزن مجموع انحرافات مثبت و منفی متغیر y_i از حد سطوح انتظار

برای حالت اول: e_i^+ و e_i^- انحرافات مثبت و منفی از $|y_i - g_{i.\max}|$ و وزن مجموع انحرافات از $|y_i - g_{i.\max}|$ است.

برای حالت دوم: e_i^+ و e_i^- انحرافات مثبت و منفی از $|y_i - g_{i.\min}|$ و وزن مجموع انحرافات از $|y_i - g_{i.\min}|$ است.

مثال- مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$f_۱ : ۱۲x_۱ + ۹x_۲ + ۱۵x_۳ \ge ۱۲۵ \text{ and } \le ۱۵۵$$
$$f_۲ : ۵x_۱ + ۳x_۲ + ۴x_۳ = ۴۰$$
$$f_۳ : ۵x_۱ + ۷x_۲ + ۸x_۳ \ge ۴۰ \text{ and } \le ۵۵$$

$$s.t.$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰$$

---
[۴۳] The Less The Better

به‌کمک مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای تجدیدنظر شده، مساله به صورت زیر نوشته می‌شود، برای تابع هدف اول وزن انحراف مثبت برابر ۵ و انحراف منفی ۱، برای تابع هدف دوم وزن انحراف مثبت ۲ و انحراف منفی ۴ و برای تابع هدف سوم فقط وزن انحراف مثبت ۳ در نظر گرفته شده است.

$$\text{Min } Z = ۵d_۱^+ + d_۱^- + ۲d_۲^+ + ۴d_۲^- + ۳d_۳^+ + e_۱^+ + e_۱^- + e_۲^+ + e_۲^-$$
$$s.t.$$
$$۱۲x_۱ + ۹x_۲ + ۱۵x_۳ - d_۱^+ + d_۱^- = y_۱$$
$$y_۱ - e_۱^+ + e_۱^- = ۱۵۵$$
$$۱۲۵ \le y_۱ \le ۱۵۵$$
$$۵x_۱ + ۳x_۲ + ۴x_۳ - d_۲^+ + d_۲^- = ۴۰$$
$$۵x_۱ + ۷x_۲ + ۸x_۳ - d_۳^+ + d_۳^- = y_۲$$
$$y_۲ - e_۲^+ + e_۲^- = ۴۰$$
$$۴۰ \le y_۲ \le ۵۵$$
$$x_۱, x_۲, x_۳, d_۱^+, d_۱^-, d_۲^+, d_۲^-, d_۳^+, d_۳^-, e_۱^+, e_۱^-, e_۲^+, e_۲^+ \ge ۰$$

مدل فوق را به کمک نرم‌افزار لینگو حل نموده و جواب بهینه ی مساله، به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$(x_۱, x_۲, x_۳) = (۵, ۰, ۳.۷۵)$ و $(f_۱, f_۲, f_۳) = (۱۱۶.۲۵, ۴۰, ۵۵)$.

تابع هدف دوم و سوم رضایت بخش هستند درحالی‌که تابع هدف دوم از میزان آرمان خود به مقدار ۸.۷۵ واحد کمتر شده است.

۵-۵-۵-۶- برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای نسبتی

برای ساده‌تر کردن مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای اصلاح‌شده توسط چانگ (۲۰۰۸)، بوتکی و همکاران (۲۰۱۵) یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی نسبتی چندگزینه‌ای ارائه کردند. در این مدل صرف‌نظر از کمینه سازی یا بیشینه سازی مساله، برای هر یک از توابع هدف یک بازه ی پیوسته و دلخواه از مقدار کمینه و بیشینه ی آرمان در نظر گرفته و آن را به عنوان بازه $\left[g_i^{\min}, g_i^{\max}\right]$ معرفی می‌کنیم. توجه کنید که هر مقدار از این بازه، برای تصمیم‌گیرنده از ارزش یکسانی برخوردار است. فقط تفاوت در این است که ما این اجازه را به مدل می‌دهیم تا خود، مقدار بهینه ی هر آرمان را در بازه ی پیشنهادی پیدا کند، با این هدف، که میزان انحراف توابع هدف از آرمان‌های بهینه، کمینه شود. سپس یک متغیر تصادفی پیوسته با عنوان λ_i در بازه $[۰,۱]$ برای هر یک از توابع هدف تعریف می‌کنیم. اگر این متغیر مقدار صفر را بگیرد، آرمان بهینه مورد نظر مقدار $g_i^{\min}$ می‌شود و برعکس اگر مقدار آن یک شد مقدار آرمان برابر $g_i^{\max}$ خواهد شد.

با این توضیحات مدل مربوط به برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای نسبتی به صورت زیر خواهد بود؛ از مزیت‌های این مدل می‌توان به سادگی و قابل‌فهم بودن آن نسبت به مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای تجدیدنظر شده اشاره کرد.

$$\min Z = \sum_{i=۱}^{n} w_i \left(d_i^+ + d_i^-\right)$$

$$s.t.$$
$$f_i(x)+d_i^- - d_i^+ = g_i^{\min} + \lambda_i \left(g_i^{\max} - g_i^{\min}\right) \quad i=۱,۲,...,n$$
$$h_k(X) = (\le \text{ or } \ge)۰ \qquad k=۱,۲,...,q$$
$$d_i^+, \mathrm{d}_i^- \ge ۰ \qquad i=۱,۲,...,n$$
$$۰ \le \lambda_i \le ۱ \qquad i=۱,۲,...,n$$

مثال- مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$f_۱ : ۳x_۱ + x_۲ - ۶x_۳ + ۲x_۴ \in g_۱$$
$$f_۲ : ۴x_۲ + ۵x_۳ - ۴x_۴ \in g_۲$$
$$f_۳ : ۱۲x_۱ + ۵x_۲ - ۶x_۴ \in g_۳$$
$$s.t.$$
$$x_۱ + ۲x_۲ - ۴x_۳ - x_۴ \ge ۲۵$$
$$۵x_۲ + x_۳ + ۳x_۳ \le ۱۲$$
$$x_۱ + x_۲ + x_۳ - x_۴ \ge ۴۰$$
$$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \ge ۰$$

بازه مربوط به آرمان‌ها توسط تصمیم‌گیرنده به صورت زیر مشخص شده است:

$g_۳ \in [-۵۰, -۴۰]$ و $g_۲ \in [۲۰, ۳۵]$ ، $g_۱ \in [۸۰, ۱۰۰]$

با توجه به توضیحات فوق، مساله به کمک مدل برنامه‌ریزی چندگزینه‌ای نسبتی به شکل زیر مدل‌سازی خواهد شد:

$$\text{Min } Z = d_۱^+ + d_۱^- + d_۲^+ + d_۲^- + d_۳^- + d_۳^+$$
$$s.t.$$
$$۳x_۱ + x_۲ - ۶x_۳ + ۲x_۴ + d_۱^- - d_۱^+ = ۸۰ + \lambda_۱ \times (۱۰۰ - ۸۰)$$
$$۴x_۲ + ۵x_۳ - ۴x_۴ + d_۲^- - d_۲^+ = ۲۰ + \lambda_۲ \times (۳۵ - ۲۰)$$
$$۱۲x_۱ + ۵x_۲ - ۶x_۴ + d_۳^- - d_۳^+ = -۵۰ + \lambda_۳ \times (-۴۰ + ۵۰)$$
$$x_۱ + ۲x_۲ - ۴x_۳ - x_۴ \ge ۲۵$$
$$۵x_۲ + x_۳ + ۳x_۳ \le ۱۲$$
$$x_۱ + x_۲ + x_۳ - x_۴ \ge ۴۰$$
$$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \ge ۰$$

پس از حل مدل فوق توسط نرم‌افزار لینگو، میزان مجموع انحرافات برابر ۴۶۷.۷۳ می‌شود، سایر متغیرها نیز مقادیر زیر را می‌گیرند:

$\lambda_۳ = ۱.۰۰$ و $\lambda_۲ = ۰.۲۴$ ، $\lambda_۱ = ۰.۳۲$ ، $f_۳ = ۴۲۷.۷۳$ ، $f_۲ = ۲۳.۶۵$ ، $f_۱ = ۸۶.۴۲$

مقادیر بهینه برای آرمان‌ها نیز عبارت‌اند از

$g_۳^* = -۴۰$ و $g_۲^* = ۲۳.۶$ ، $g_۱^* = ۹۲.۸$

۵-۵-۶-روش بیشینه کمینه وزن‌های فازی[44]

در واقعیت ، حد تحمل یا تابع عضویت برای اهداف فازی iام ممکن است توسط یک تصمیم گیرنده به منظور مقابله با نوعی از شرایط که در آن تقریباً رسیدن به یک راه حل بهینه به طور همزمان برای تمام توابع هدف غیر ممکن است تعریف و مشخص شود. با توجه به روش زیمرمن، یک مدل چند هدفه فازی می تواند به شکل زیر فرموله شود:

$$x^T = [x_1, x_2 ..., x_n]$$

$$\tilde{Z}_k = \sum_{j=1}^{n} c_{jk} x_j \;\tilde{\le}\; Z_k^0 \quad \text{k=1,2,…,p}$$

$$\tilde{Z}_l = \sum_{j=1}^{n} c_{jl} x_j \;\tilde{\ge}\; Z_l^0 \quad \text{l=p+1,p+2,…,q}$$

s.t

$$g_s(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{sj} x_j \le b_s, \quad \text{s=1,…,m}$$

$$x \ge 0 \text{ , j=1,2,…,n}$$

در اینجا a_{sj} , c_{jl} , c_{jk} و b_s مقادیر قطعی هستند. محیط فازی با علامت " ~ " نشان داده می شود. در مجموعه، محدودیت های علامت " $\tilde{\le}$" نشان دهنده نوع فازی از علامت "$\le$" است. به عبارتی به عنوان " اصل کوچتر یا مساوی از " تفسیر می شود. همچنین علامت ""$\tilde{\ge}$" معنی " اصل بزرگتر یا مساوی از " را می دهد. Z_0^l و z_0^k به عنوان سطح مطلوبیت که تصمیم گیرنده در نظر دارد به آن برسد بیان می شود. زیمرمن رویکرد برنامه ریزی خطی فازی خود را به مساله‌ی برنامه ریزی خطی چند هدفه فازی گسترش داد. توابع هدف Zi که i=1,2,…,q توسط مجموعه های فازی با توابع عضویت افزایش خطی از ۰ و ۱ بیان می شوند. در این روش هر تابع هدف به طور جداگانه بیشترین و کمترین مقدار استفاده شده تابع عضویت توسط اهداف می باشد. μ_{zk} و μ_{zl} نشان دهنده تابع عضویت خطی برای کمترین اهداف و بیشترین اهداف می باشند که به صورت زیر نشان داده می شوند :

$$\mu_{zk}(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } Z_k \le Z_k^- \\ f_{\mu z_k} = (Z_k^+ - Z_k(x)) / (Z_k^+ - Z_k^-) & \text{for } Z_k^- \le Z_k(x) \le Z_k^+ \quad (k = 1, 2, ..., p) \\ 0 & \text{for } Z_k \ge Z_k^+ \end{cases} \tag{4.47}$$

$$\mu_{zl}(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } Z_l \ge Z_l^+ \\ f_{\mu zl} = (Z_l(x) - Z_l^-) / (Z_l^+ - Z_l^-) & \text{for } Z_l^- \le Z_l(x) \le Z_l^+ \quad (l = p+1, p+2, ..., q) \\ 0 & \text{for } Z_l \le Z_l^- \end{cases} \tag{4.48}$$

[44] Fuzzy Weighted Max-min Approach

در اینجا Z_k^- و Z_l^+ بهترین جواب این مدل هستند که از طریق حل هر تابع هدف به طور جداگانه، به دست آمده اند. علاوه بر این Z_k^+ و Z_l^- ، بدترین مقدار هر تابع هدف می باشند. طبق روش زیمرمن ، با استفاده از Max-Min به عنوان تبدیل کننده مدل فازی بالا، معادل مدل قطعی می تواند عمل کند که به شرح زیر است:

$$\text{Max } \lambda$$

Subject to:

$$\lambda \le f_{\mu z_i}, \quad i=1,\dots,q$$
$$g_r(x) \le b_r$$
$$\lambda \in [0,1]$$
$$x_j \ge 0,\ j=1,\dots,n$$

روش max-min اهمیت توابع هدف را در نظر نمی گیرد. در این راه حل، اهداف به میزان برابر اهمیت دارند. بنابراین با توجه به وزن هر تابع هدف، لین (۲۰۰۴) یک مدل وزنی Max-Min برای برنامه ریزی چند هدفه فازی که به شکل زیر فرموله می شود پیشنهاد کرد :

$$\text{Max } \lambda$$
S.t:
$$\mathrm{W}_i \lambda \le f_{\mu z_i}, \quad i=1,\dots,q$$
$$g_r(x) \le b_r$$
$$\lambda \in [0,1]$$
$$\sum_{j=1}^{q} \mathrm{W}_i = 1,\ \mathrm{W}_i \ge 0$$
$$x_i \ge 0,\ i=1,\dots,n$$

وزن هر تابع هدف بر اساس نظرات کارشناسان در درون شرکت با استفاده از روش FAHP تعیین می شود. حل این مدل، معادل حل مدل چند هدفه با توابع عضویت جدید به شرح زیر است:

$$\mu_{zk}(x) = \begin{cases} 1/w_j & \text{for } Z_k \le Z_k^- \\ f_{\mu z_k}/w_j = ((Z_k^+ - Z_k(x))/(Z_k^+ - Z_k^-))/w_j & \text{for } Z_k^- \le Z_k(x) \le Z_k^+ \quad (k=1,2,\dots,p) \\ 0 & \text{for } Z_k \ge Z_k^+ \end{cases}$$

$$\mu_{zl}(x) = \begin{cases} 1/w_j & \text{for } Z_l \ge Z_l^+ \\ f_{\mu zl}/w_j = ((Z_l(x) - Z_l^-)/(Z_l^+ - Z_l^-))/w_j & \text{for } Z_l^- \le Z_l(x) \le Z_l^+ \quad (l=p+1,p+2,\dots,q) \\ 0 & \text{for } Z_l \le Z_l^- \end{cases}$$

۵-۵-۷-روش محدودیت اپسیلون[45]

یکی از روش های شناخته شده برای حل مسائل چند هدفه، روش محدودیت اپسیلون است. در این روش تمامی توابع هدف به جز یکی از آنها، در هر مرحله تبدیل به محدودیت می شوند تا مسئله ی چند هدفه تبدیل به مسئله ی تک هدفه شود. مرز پارتو می تواند با روش قید ε ایجاد شود :

$$\text{Min } F_1(x)$$

$$x \in X$$

$$F_2(x) \leq \varepsilon_2$$

$$\dots$$

$$F_n(x) \leq \varepsilon_n$$

مراحل روش محدودیت اپسیلون :

۱) یکی از توابع هدف به عنوان تابع هدف اصلی انتخاب می شود.

۲) هر بار با توجه به یکی از توابع هدف، مساله را حل می کنیم و مقدار بهینه هر تابع هدف را بدست می آوریم.

۳) بازه بین دو مقدار بهینه توابع هدف فرعی را به تعداد از قبل مشخص، تقسیم بندی می کنیم و یک جدول مقادیر برای $\varepsilon 2, \dots, \varepsilon n$ به دست می آوریم.

۴) هر بار مساله را با تابع هدف اصلی با هریک از مقادیر $\varepsilon 2, \dots, \varepsilon n$ حل می کنیم و در نهایت جواب های پارتو را بدست می آوریم.

۵-۵-۸-روش محدودیت اپسیلون تقویت شده[46]

روش محدودیت اپسیلون تقویت شده، یکی از روشهای حل مسائل چند هدفه است که جواب های بهینه کارآمد پارتو را ارائه می کند. در روش محدودیت اپسیلون تقویت شده، یکی از توابع هدف به عنوان تابع هدف اصلی در نظر گرفته می شود تا بهینه سازی شود؛ در حالی که تابع هدف دیگر به عنوان محدودیت در مدل قرار می گیرد. مدل محدودیت اپسیلون تقویت شده را میتوان مطابق رابطه زیر نمایش داد :

---

[45] epsilon constraint

[46] Augmented ε-constraint

$$Max(f_1(x) + \vartheta * \left(\frac{s_2}{r_2} + \frac{s_3}{r_3} + \cdots + \frac{s_i}{r_i} \ldots + \frac{s_n}{r_n}\right))$$

St :

$$f_2(x) - s_2 = \varepsilon_2$$

$$f_3(x) - s_3 = \varepsilon_3$$

....

$$i \in [2, n]$$

$$s_i \in R^+$$

طبق رابطه بالا راه حل های بهینه پارتو بدست می آیند، که در آن r_i دامنه تابع هدف i ام ، ϑ یک عدد کوچک بین ۰.۰۰۱ تا ۰.۰۰۰۰۰۱ و S_i یک متغیر اضافی غیر منفی هستند. ابتدا مقدار NIS_{fi} (راه حل ایده آل منفی) و PIS_{fi} (راه حل ایده آل مثبت) برای هر تابع هدف بدست می آید، سپس مقدار دامنه تابع هدف iام طبق رابطه زیر محاسبه می شود:

$$r_i = PIS_{fi} - NIS_{fi}$$

بعد از آن r_i به بازه های برابر l_i تقسیم می شود.سپس l_i+1 نقطه بدست آورده می شوند که طبق رابطه مقدار اپسیلون ها بر اساس این نقاط بدست آورده می شود:

$$\varepsilon_i^{\eta} = NIS_{fi} + \frac{r_i}{l_i} * \eta$$

در نهایت هر بار مسئله را با تابع هدف اصلی با هریک از مقادیر $\varepsilon 2, \ldots, \varepsilon n$ حل می کنیم و جواب های پارتو بدست آمده را گزارش می دهیم.

فصل ششم: تصمیم گیری چند معیاره فازی

6-1- مفاهیم مجموعه فازی(توابع، عملگرها، نرمها، افرازبندی، متغییرهای عددی و زبانی، اعدادفازی و عملیات بر روی آنها)

منطق فازی عبارت است از «استدلال با مجموعه فازی». مجموعه های فازی توسط ماکس بلک و لطفی زاده ارائه گردید. ابتدا در سال ۱۹۳۷ ماکس بلک- فیلسوف کوانتوم- مقاله ای راجع به آنالیز منطق به نام «ابهام» را در مجله علم منتشر کرد. البته جهان علم و فلسفه، مقاله بلک را نادیده گرفت، اگر این چنین نمی شد ما هم اکنون باید منطق گنگ را به جای منطق فازی مورد بررسی قرار می دادیم. سپس در سال ۱۹۶۵ لطفی زاده [47] مقاله ای تحت عنوان مجموعه های فازی منتشر ساخت. در این مقاله او از منطق چند مقداری لوکاسیه ویچ برای مجموعه ها استفاده کرد. او نام فازی را برای این مجموعه ها در نظر گرفت تا مفهوم فازی را از منطق دودویی دور سازد. او لغت فازی را انتخاب کرد تا همچون خاری در چشم علم مدرن فرو رود.

مروری بر نظریه مجموعه های قطعی که اساس ریاضیات مدرن را تشکیل می دهد، صورت گرفت. در این نظریه، مجموعه، گرد آرایه ای معین از اشیاء است و در تعریف مجموعه بر لفظ معین تأکید می شود. به عبارت دیگر هر مجموعه با یک ویژگی خوش، تعریف مشخص می شود. اگر یک شیء دارای آن ویژگی باشد، عضو مجموعه و اگر نباشد، عضو مجموعه نیست. مثلاً ویژگی «اعداد حقیقی بزرگتر از ۱۰۰» یک ویژگی خوش تعریف است و تشکیل یک مجموعه می دهد، چرا که به یقین می توان گفت که یک عدد حقیقی بزرگتر از ۱۰۰ هست یا نیست. اما ویژگی «اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰۰» یک ویژگی روشن، دقیق و خوش تعریف نیست، چرا که به یقین نمی توان گفت که آیا یک عدد حقیقی مشخص (مثلاً ۱۱۰) در این ویژگی می گنجد یا نمی گنجد. لطفی زاده پیشنهاد می کند که برای رفع این مشکل، مناسب است که به هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی، عددی از بازده [۱ و ۰] به عنوان درجه نزدیکی آن عدد به ۱۰۰ نسبت دهیم. هر چه این عدد به ۱۰۰ نزدیک تر بود، عدد متناظر برای عضویت آن در گرد آیه «اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰۰» به یک نزدیک تر باشد و بر عکس هر چه عدد مورد نظر دورتر از ۱۰۰ بود، درجه عضویت آن در گرد آیه «اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰۰» به صفر نزدیک تر باشد. به این ترتیب به جای اینکه بگوییم عدد ۱۱۰ در گرد آیه «اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰۰» می گنجد یا نمی گنجد، می گوییم درجه نزدیکی عدد ۱۱۰ به ۱۰۰، مثلاً ۰/۶ است. به عبارت دیگر به جای آن که بگوییم عدد ۱۱۰ عضو گرد آیه «اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰۰» هست یا نیست، می گوییم که عدد ۱۱۰ با درجه ۰/۶ عضو گرد آیه «اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰۰» است.

به این ترتیب بسیاری از مفاهیم ناخوش تعریف و بیگانه با مجموعه های قطعی وارد دنیای ریاضیات می شود و به تفکرات، زبان و منطق بشری در قالب یک ساختار ریاضی نظم و ترتیب می دهد. این ساختار ریاضی، نظریه مجموعه های فازی نامیده می شود که در ادامه مفاهیم پایه ای آن مورد بحث و بررسی قرار می گیرد.

۶-۱-۱- تابع عضویت

تابع نشانگر مجموعه قطعی A از X ، تابعی از X به مجموعه (۱ و ۰) می باشد.

$$\mu_A : X \to \{۰,۱\}$$

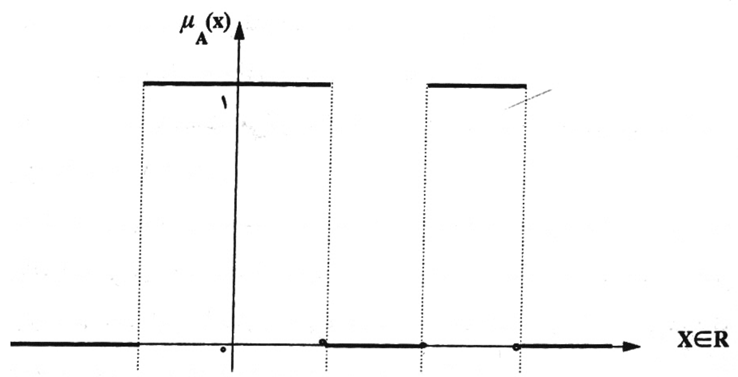
[47] Zadeh, L.A. (1965)

حال اگر برد تابع نشانگررا، از مجموعه دو عضوی $\{۰,۱\}$ به بازده $[۰,۱]$ گسترش دهیم، تابعی خواهیم داشت که به هر عضو x از X، عددی از بازده $[۰,۱]$ را نسبت می دهد. این تابع، تابع عضویت A نامیده شده و به صورت زیر تعریف می گردد:

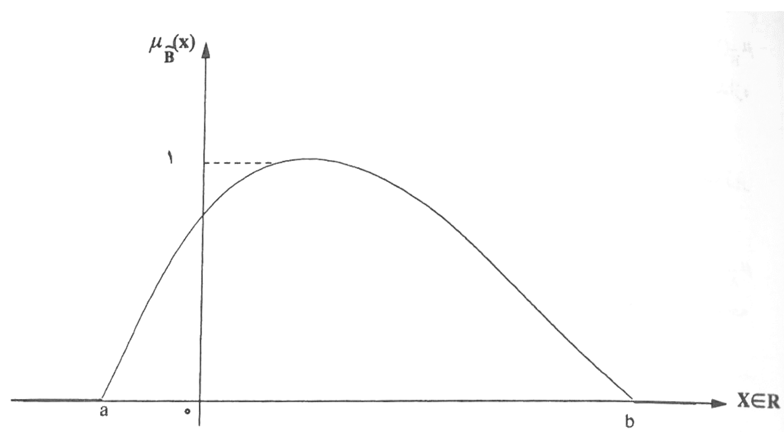
$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [۰,۱]$$

مجموعه $\tilde{A}$ که به هر x از X، عددی در بازده $[۰,۱]$ را نسبت می دهد، یک زیر مجموعه فازی از X نامیده می شود. در تابع $\mu_{\tilde{A}}(x)$، نزدیکی بیشتر به یک، نشان دهنده ی تعلق بیشتر x به مجموعه $\tilde{A}$ و نزدیکی بیشتر به صفر، نشان دهنده ی تعلق کمتر x به مجموعه $\tilde{A}$ است. به لحاظ شهودی می توان $\mu_{\tilde{A}}(x)$ را درجه پذیرش ما در قبول x به عنوان عضوی از مجموعه $\tilde{A}$ در نظر گرفت. همچنین در حالت حدی چنانچه $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۱$ باشد، x کاملاً در $\tilde{A}$ قرار دارد و چنانچه $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۰$ باشد، x اصلاً عضو $\tilde{A}$ نمی باشد. بنابراین مجموعه های فازی و توابع عضویت آنها، تعمیم یافته مجموعه های قطعی و توابع نشانگر آنها می باشند.

مثال: در نمودار زیر یک مجموعه قطعی و در نمودار بعدی یک مجموعه فازی در R نشان داده شده است.



نمودار نمایش یک مجموعه قطعی



نمودار نمایش یک مجموعه فازی

درجه عضویت هر عدد حقیقی $x \in R$ در مجموعه فازی $\tilde{B}$ در بازه (a,b) بزرگتر از صفر و خارج از باز (a,b) برابر صفر است.

مثال: مجموعه مرجع $X = \{۱,۲,۳,۴\}$ و زیر مجموعه $A = \{۱,۲,۳\}$ از آن را در نظر بگیرید. تابع نشانگر مجموعه A عبارتند از:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}۱ & x=۱,۲,۳\\ ۰ & x=۴\end{cases}$$

در این مجموعه روشن است که $\mu_A(۲)=۱$ و $\mu_A(۴)=۰$ است. یعنی ۲ متعلق به مجموعه A است و ۴ به این مجموعه تعلق ندارد. حال مجموعه فازی $\tilde{B}$ که بیانگر «اعداد بزرگ» است را در نظر بگیرید. این مجموعه را می توان با تابع عضویت زیر تعریف کرد:

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases}۰ & x=۱\\ ۰/۳ & x=۲\\ ۰/۷ & x=۳\\ ۱ & x=۴\end{cases}$$

در مجموعه $\tilde{B}$، $\mu_{\tilde{B}}(۴)=۱$ و $\mu_{\tilde{B}}(۱)=۰$ نشان می دهد که تعلق عدد ۴ به مجموعه «اعداد بزرگ» کامل است و عدد ۱ اصلاً عضو این مجموعه نیست. همچنین $\mu_{\tilde{B}}(۲)=۰/۳$ و $\mu_{\tilde{B}}(۳)=۰/۷$ بیان می دارند که تعداد ۲ و ۳ ویژگی «بزرگ بودن» را به ترتیب به اندازه ۰/۳ و ۰/۷ دارا می باشند.

مفاهیم مقدماتی مجموعه های فازی

مجموعه مرجع X و زیر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از آن را در نظر بگیرید. مجموعه عناصری از X که $\mu_{\tilde{A}}(x)>۰$ باشد، تکیه گاه A نامیده شده و با SuppA نشان داده می شود.

$$SuppA=\{x\in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x)>۰\}$$

رابطه فوق نشان می دهد که تکیه گاه، یک مجموعه قطعی و تابعی از مجموعه توانی فازی X (مجموعه شامل تمام زیر مجموعه های فازی X) به مجموعه توانی X می باشد.

$$Supp:\tilde{\rho}(x)\rightarrow \rho(x)$$

بر این اساس، مجموعه فازی تهی مجموعه ای است که هیچ تکیه گاهی ندارد و درجه عضویت تمام عناصر آن برابر صفر است. در مجموعه $\tilde{A}$، $Sup(\mu_{\tilde{A}}(x))$ ارتفاع مجموعه $\tilde{A}$ نامیده می شود و با M نشان داده می شود. اگر ارتفاع مجموعه $\tilde{A}$ برابر ۱ باشد، آن را نرمال و در غیر اینصورت $\tilde{A}$ را غیر نرمال گویند. روشن است که هر مجموعه فازی زیر نرمال $\tilde{A}$ را می توان با تقسیم $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ها بر ارتفاع آن نرمال کرد.

$$\mu_{norm\tilde{A}}(x)=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{Sup(\mu_{\tilde{A}}(x))}$$

همچنین اگر برای عنصری مثل x در A داشته باشیم $\mu_{\tilde{A}}(x)=\frac{1}{2}$، x را یک نقطه گذر (معبر) $\tilde{A}$ می گویند.

۶-۱-۲- عملگرهای مجموعه ای فازی

در نظریه ی مجموعه های فازی، ابتدایی ترین تعریف از عملگرهای اصلی اشتراک، اجتماع و متمم برای هر $x \in X$ به صورت زیر می باشد:

$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$: اشتراک

$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$: اجتماع

$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$: متمم

که در آن « $\wedge$ » بیانگر مینیمم و « $\vee$ » بیانگر ماکزیمم است. این عملگرها مشابه عملگرهای مجموعه ای ارائه شده برای مجموعه های قطعی در بخش قبل است. عملگرهای مجموعه های فازی ارائه شده در فوق، کلیه مشخصه های جبری مجموعه های قطعی را بجز دو قانون طرد و شمولیت در بر می گیرد. یعنی قوانین طرد و شمولیت در مجموعه های ارزی برقرار نیست و داریم:

$$\tilde{A} \cap \overline{\tilde{A}} \neq \phi$$

$$A \cup \overline{\tilde{A}} \neq x$$

و این از آنجا ناشی می شود که هیچکدام از مجوعه های فازی $\tilde{A}$ و $\overline{\tilde{A}}$ دارای کرانهای دقیقی نیستند و اصطلاحاً همپوش هستند. البته باید توجه داشت که این همپوشی کامل نیست و داریم:

$$\min\left[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\overline{\tilde{A}}}(x)\right] \leq \frac{۱}{۲} \qquad \forall x \in X, \forall \tilde{A} \subset X$$

$$\max\left[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\overline{\tilde{A}}}(x)\right] \geq \frac{۱}{۲} \qquad \forall x \in X, \forall \tilde{A} \subset X$$

علاوه بر عملگرهای اشتراک، اجتماع و متمم تعریف شده در فوق، عملگرهای دیگری نیز برای مجموعه های فازی تعریف شده اند که در ذیل به تعدادی از آنها اشاره می شود.

۶-۱-۳- نرم های مثلثی

عملگرهای max و min تعریف شده در فوق، به دو رده اندازه های بزرگتر تعلق دارند که نرم های مثلثی و همنرم های مثلثی نامیده می شود. نرم های مثلثی و همنرم های مثلثی را به طور خلاصه T- نرم ها و T- همنرم ها (یا S- نرم ها) گویند. این دو رده از اندازه ها اولین بار توسط منجر ارائه شد. در زیر تعریف «نرم مثلثی» آمده است.

تعریف ۲-۱ : بازه $I = [۰,۱]$ را در نظر بگیرید. اگر تابع دو متغیره $T(x,y) : I \times I \to I$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) $T(۰,۰) = ۰ \ , \ T = (۱,۱) = ۱$

۲) $T(x,y) = T(y,x)$ خاصیت جابجایی

۳) $(x \leq x', y \leq y') \Rightarrow T(x,y) \leq T(x',y')$ خاصیت یکنوایی

۴) $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$ خاصیت شرکت پذیری

T را یک «نرم مثلثی» یا به اختصار «T- نرم» گویند اگر:

۵) $T(x,۱) = x$

و آن را یک «همنرم مثلثی» یا به اختصار «T- همنرم» گویند اگر:

$۶) T(x,\cdot) = x$

از تعریف فوق معین می گردد که T- نرم ها و T- همنرم ها دوگان یکدیگرند. بر این اساس برای هر T- نرم می توان فقط و فقط یک T- همنرم (S نرم) تعریف کرد، به قسمی که:

$$T(x,y) = ۱ - S(۱-x\ ,\ ۱-y)$$

نکته دیگر آن است که اندازه های min و max حالتهای حدی T- نرم ها و T- همنرم ها هستند. یعنی برای هر T- نرم و T- همنرم (S- نرم)، داریم:

$$T(x,y) \le \min(x,y)$$
$$S(x,y) \ge \max(x,y)$$

همچنین دقت شود که عملگرهای زیادی وجود دارند که در شرایط T- نرم و T- همنرم صدق می کنند که در زیر به تعدادی از آنها اشاره می شود.

الف) $T(x,y) = x.y\ ,\ S(x,y) = x + y - x.y$

بر اساس نرم های فوق، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\mu_{(\tilde{A}\cap\tilde{B})}(x) = \mu_{(\tilde{A}.\tilde{B})}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)$$
$$\mu_{(\tilde{A}\cup\tilde{B})}(x) = \mu_{(\tilde{A}+\tilde{B})}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)$$

که در آن $\tilde{A}.\tilde{B}$ را حاصلضرب جبری و $\tilde{A}+\tilde{B}$ را جمع جبری (احتمالی) دو مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ می گویند.

ب) $T(x,y) = \max(\cdot, x+y-۱), S(x,y) = \min(۱, x+y)$

بر اساس نرم های فوق، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\mu_{(\tilde{A}\cap\tilde{B})}(x) = \mu_{(\tilde{A}\Theta\tilde{B})}(x) = \max\{\circ, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - ۱\}$$
$$\mu_{(\tilde{A}\cup\tilde{B})}(x) = \mu_{(\tilde{A}\oplus\tilde{B})}(x) = \min\{۱\ , \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

که در آن $A\Theta B$ را تفاضل کراندار و $A\oplus B$ را جمع کراندار دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ می نامند.

بر اساس تعاریف فوق، می توان ثابت کرد که برای هر دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ داریم:

$$\tilde{A}\Theta\tilde{B} \subseteq \tilde{A}.\tilde{B} \subseteq \tilde{A}\cap\tilde{B} \subseteq \tilde{A}\cup\tilde{B} \subseteq \tilde{A}+\tilde{B} \subseteq \tilde{A}\oplus\tilde{B}$$

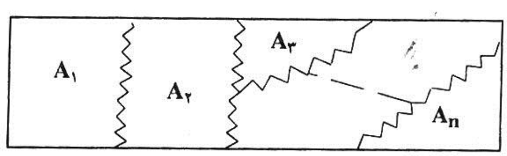
۶-۱-۴- افراز فازی

مجموعه مرجع X و زیر مجموعه های فازی $\tilde{A}_۱, \tilde{A}_۲, \ldots, \tilde{A}_n$ از آن را در نظر بگیرید. اگر داشته باشیم:

$۱)\ \tilde{A}_i \ne \phi,\ \tilde{A}_i \ne X \qquad i = ۱, \ldots.\ n$

$۲)\ \sum_{i=۱}^{n} \mu_{\tilde{A}_i}(x) = ۱$

در اینصورت $\tilde{A}_۱, \tilde{A}_۲, \ldots, \tilde{A}_n$ را یک افراز فازی X گویند.



تعریف افراز فازی از آن جهت مورد توجه قرار می گیرد که در بسیاری از مسایل واقعی هر چند که مرزهای دقیقی بین پدیده ها وجود ندارد، اما آنها روی هم رفته مکمل یکدیگرند. مانند تقسیم بندی انسانها بر حسب وزن به کم وزن، متوسط و سنگین وزن. یعنی درست است که مرز دقیقی بین کم وزن، متوسط و سنگین وزن بودن وجود ندارد. ولی هر انسانی بالاخره از زمره انسانهای کم وزن، متوسط و سنگین وزن خارج نیست.

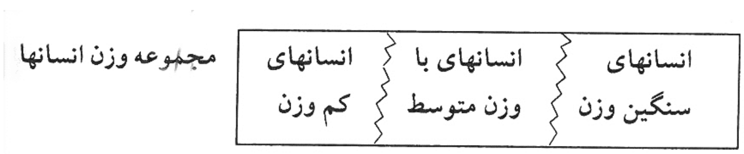
مثال: مجموعه مرجع {رضا و علی و حسن}=X و زیر مجموعه های فازی کم وزن، متوسط و سنگین وزن را به صورت زیر در نظر بگیرید.

کم وزن $\tilde{A} = \{ \frac{0/8}{\text{حسن}} \text{ و } \frac{0/2}{\text{علی}} \text{ و } \frac{0}{\text{رضا}} \}$

وزن متوسط $\tilde{B} = \{ \frac{0/2}{\text{حسن}} \text{ و } \frac{0/7}{\text{علی}} \text{ و } \frac{0/2}{\text{رضا}} \}$

سنگین وزن $\tilde{C} = \{ \frac{0}{\text{حسن}} \text{ و } \frac{0/1}{\text{علی}} \text{ و } \frac{0/8}{\text{رضا}} \}$

روشن است که $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ تشکیل یک افراز برای $\tilde{A}$ می دهند. نمودار زیر این مطلب را نشان می دهد.



نمودار افراز فازی مجموعه وزن انسانها

۶-۱-۵- از متغیرهای عددی تا متغیرهای زبانی

در زندگی روزمره، کلماتی وجود دارند که اغلب برای توصیف متغیرها استفاده می شوند. به عنوان مثال هنگامی که می گوییم «امروز گرم است» یا معادل آن «دمای هوا، امروز بالاست»، ما از واژه ی «بالا» برای توصیف «دمای هوای امروز» استفاده کردیم. بدین معنی که متغیر «دمای هوای امروز»، واژه ی «بالا» را به عنوان مقدار خود پذیرفته است. واضح است که متغیر «دمای هوای

امروز» می تواند مقادیری نظیر ۲۵ درجه سانتیگراد و ۱۹ درجه سانتیگراد و ... را اختیار کند. هنگامی که یک متغیر، اعداد را به عنوان مقدار بپذیرد، ما یک چارچوب ریاضی مشخصی برای فرموله کردن آن داریم. ولی هنگامی که متغیر، واژه ها را به عنوان مقدار می گیرد، در آن صورت چارچوب مشخص برای فرموله کردن آن در تئوری ر یاضیات کلاسیک نداریم، برای این که چنین چارچوبی به دست آوریم، مفهوم متغیرهای زبانی تعریف شده است. در صحبت های عامیانه، اگر یک متغیر بتواند، واژه هایی از زبان طبیعی را به عنوان مقدار بپذیرد، یک متغیر زبانی نامیده می شود. حال سئوال این است که فرموله کردن واژه ها در گزاره های ریاضی چگونه انجام می شود؟ در اینجاست که ما از مجموعه های فازی برای مشخص کردن واژه ها استفاده می کنیم. بنابراین تعریف زیر را داریم.

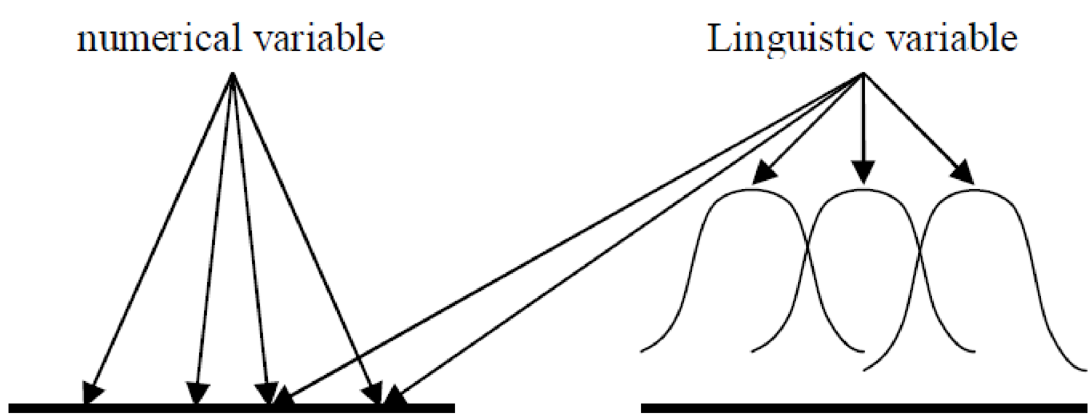
تعریف۱: اگر یک متغیر بتواند واژه هایی از زبان طبیعی را به عنوان مقدار خود بپذیرد، آنگاه یک متغیر زبانی نامیده می شود، که واژه ها بوسیله مجموعه های فازی در محدوده ای که متغیرها تعریف شده اند، مشخص می شوند.

تعریف۱، تعریف ساده و غیر رسمی برای متغیرهای زبانی می باشد. در نوشته های تئوری فازی، تعریف رسمی تری از متغیرهای زبانی بکار می رود. این تعریف در زیر آورده شده است.

تعریف۲: یک متغیر زبانی به وسیله ی چهار پارامتر (X,T,U,M) مشخص می گردد که:

- X نام متغیر زبانی است.
- T مجموعه مقادیر زبانی است که X اختیار می کند.
- U دامنه فیزیکی واقعی است که در آن متغیر زبانی X ، مقادیر کمی (عددی) خود را اختیار می کند.
- M یک قاعده لغوی است که هر مقدار زبانی در T را به یک مجموعه فازی در U مرتبط می سازد.

با مقایسه تعریف های ۱ و ۲ مشاهده می شود که این دو در اصل با هم معادل هستند. از این تعریف ها می بینیم که متغیرهای زبانی در واقع توسعه متغیرهای عددی می باشند و می توانند مجموعه های فازی را به عنوان مقادیر خود بپذیرند. شکل زیر را ببینید.



شکل از متغیر عددی تا متغیر زبانی

چرا مفهوم متغیر زبانی اهمیت دارد؟ بدین دلیل که متغیرهای زبانی، عناصر اساسی در نمایش دانش بشری محسوب می شوند. هنگامی که ما از سنسورها برای اندازه گیری یک متغیر استفاده می کنیم، آن ها به ما مقادیر عددی می دهند. هنگامی که ما از

انسان های خبره می خواهیم که یک متغیر را ارزیابی کنند، به ما کلمات و واژه هایی می دهند. به عنوان مثال هنگامی کـه از یـک رادار برای اندازه گیری سرعت ماشین استفاده می کنیم، به ما اعدادی نظیر 39mph ، 42mph و ... می دهد. هنگامی که از یـک انسان می خواهیم راجع به سرعت ماشین اظهار نظر کند، اغلب با کلماتی نظیر «پایین»، «بـالا» آن را بیـان مـی کنـد. بنـابراین بـا معرفی متغیرهای زبانی، ما قادر خواهیم بود، توصیف های مبهم و نامعلوم در زبان هـای طبیعـی را در گـزاره هـای ریاضـی دقیـق، فرموله کنیم. این اولین قدم برای ورود و مشارکت دانش بشـری در سیســتم هـای مهندسـی بـه شـکل سیسـتماتیک و مـوثر مـی باشد(غفرزاده۱۳۷۸).

۶-۱-۶- اعداد فازی

اعداد فازی نوعی خاص از مجموعه‌های فازی هستند. بنابراین با درک مفهوم مجموعه فازی می‌توان اعداد فـازی را بـه سـادگی فـرا گرفت. در منطق کلاسیک، هر عدد یک مقدار قطعی و مشخص است؛ اما در منطق فازی، هر عدد مقداری تقریبی است. عدد فـازی یک مجموعه فازی با شرایط سه‌گانه زیر است:

- نرمال باشد.
- محدب باشد .
- مجموعه پشتیبان آن محدود باشد.

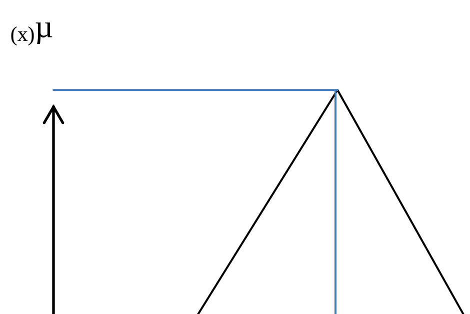
انواع بسیار متنوعی از اعداد فازی با نام‌ها و ویژگی‌های متفاوت ارائه شده و بکار گرفته شده است. اما یک اصـل مهـم در بکـارگیری تئوری فازی کارایی محاسباتی آن است. کار کردن با اعداد فازی مختلف دشواری‌های زیادی دارد.

عدد فازی مثلثی TFN

عدد فازی مثلثی (Triangular fuzzy number, TFN) یک عدد فازی است که با سه عدد حقیقـی بـه صـورت F=(l,m,u) نمایش داده می‌شود. کران بالا که با u نشان داده می‌شود بیشینه مقادیری است که عدد فازی F می‌تواند اختیار کند. کـران پـایین که با l نشان داده می‌شود کمینه مقادیری است که عدد فازی F می‌تواند اختیار کند. مقدار m محتمل ترین مقدار یک عدد فـازی است. تابع عضویت یک عدد فازی مثلثی به صورت زیر است:

$$\mu_f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-l}{m-l} & l < x < m \\ \dfrac{u-x}{u-m} & m < x < u \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

عدد فازی مثلثی F=(l,m,u) در فضای هندسی به صورت زیر نمایش داده می‌شود.



i m u x

با توجه به اینکه، تابع عضویت اعداد مثلثی مشخص ~~است اگر x بین l و m باشد آن گاه هر چه بزرگتر باشد درجه عض~~ویت آن نیز بزرگتر خواهد شد، تا جائی که برای x= m درجه عضویت برابر یک می‌شود. اگر x بین m و u باشد هرچه بزرگتر باشد، درجه عضویت کوچکتر خواهد شد و در x= u درجه عضویت صفر خواهد شد.

۶-۱-۶-۱- عملیات جبری روی اعداد فازی مثلثی

کارایی محاسباتی اعداد فازی مثلثی به علت سادگی انجام عملیات ریاضی روی آن بسیار زیاد است. عملیات ریاضی روی اعداد فازی مانند F1 و F2 به سادگی قابل انجام است:

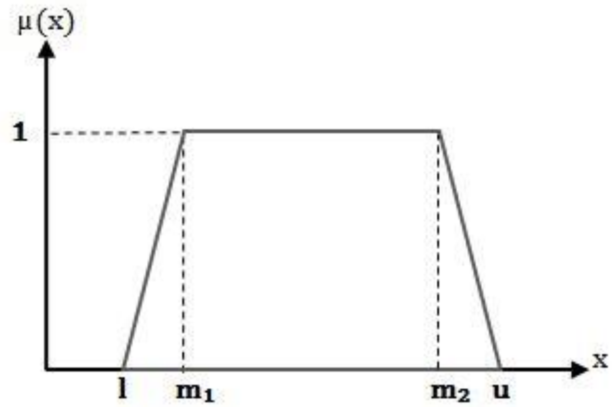
$$F_1 = (I_1, m_1, u_1)$$
$$F_2 = (I_2, m_2, u_2)$$
$$F_1 \oplus F_2 = (I_1 \oplus I_2, m_1 \oplus m_2, u_1 \oplus u_2)$$
$$F_1 \Theta F_2 = (I_1 \Theta I_2, m_1 \Theta m_2, u_1 \Theta u_2)$$
$$F_1 \otimes F_2 = (I_1 \otimes I_2, m_1 \otimes m_2, u_1 \otimes u_2)$$
$$\frac{F_1}{F_2} = (\frac{l_1}{u_2}, \frac{m_1}{m_2}, \frac{u_1}{l_2})$$
$$F_1^{-1} = (\frac{1}{u_1}, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{l_1})$$

همچنین فاصله دو عدد فازی مثلثی نیز از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(l_1, l_2)^2 + (m_1 - m_2)^2 + (u_1 - u_2)^2\right]}$$

۶-۱-۶-۲- اعداد فازی ذوزنقه‌ای

عدد فازی ذوزنقه‌ای Trapezoidal یک عدد فازی است که به صورت F=(l,m1,m2,u) نمایش داده می‌شود. تابع عضویت عدد فازی ذوزنقه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:



بازه پشتیبان F= [l, u] مفروض است و بازه‌ای بین دو مقدار m1 و m2 به عنوان مقادیر محتمل با درجه عضویت یک قرار دارنـد. برای نمونه افراد بین 15 تا ۳۵ سال تقریباً جوان محسوب می‌شوند. در این میان افراد گروه سنی ۱۸ تا 25 سال بدون تردید جوان هستند.

مشابه اعداد مثلثی راست و چپ، ما می‌توانیم اعداد ذوزنقه‌ای راست و چپ را بصـورت بخـش‌هـایی از یـک عـدد ذوزنقـه ای نشـان دهیم. عدد ذوزنقه‌ای راست که بصورت Fr=(m1,m1,m2,u) نشان داده می‌شـود، دارای بـازه پشـتیبان [m1,u] اسـت و عـدد ذوزنقه ای چپ که بصورت Fl=(l,m1,m2,m2) نشان داده می‌شود، دارای بازه پشتیبان [l,m2] است.

۶-۱-۶-۳- فرآیند تحلیل سلسله مراتبی فازی (Fuzzy AHP)

فرآیندتحلیل سلسله مراتبی، اولین بار توسط توماس ال ساعتی عراقی الا صل [۴۸]دردهه ۱۹۷۰ ابداع گردید. فرآینـد تحلیـل سلسـله مراتبی روشی معتبر و قوی بوده و یکی ازمعروفترین فنون تصمیم گیری چندمنظوره می باشد، که برای تصمیم گیـری درشـرایطی به کارمی رود که معیارهای متضاد، تصمیم گیری بین گزینه ها را با مشکل مواجه می سازد. معیارهای مطرح شده می توانـد کمـی وکیفی باشد. اساس این روش تصمیم گیری، برمبنای مقایسات زوجی نهفته است وتصمیم گیرنـده کـاررا بـا فـراهم آوردن درخـت سلسله مراتب تصمیم، آغازمی کند. درخت سلسله مراتب تصمیم، عوامل مورد مقایسه وگزینه های رقیب مورد ارزیابی درتصـمیم را نشان می دهد. سپس یک سری مقایسات زوجی انجام می گیرد.

این مقایسات وزن هریک از فاکتورها را درراستای گزینه های رقیب مشخص می سازد. ودرنهایت فرآیند تحلیل سلسـله مراتبـی بـه گونه ای ماتریس های حاصل ازمقایسات زوجی را با یکدیگر تلفیق می سازد که تصـمیم بهینـه حاصـل آیـد. بـه کمـک ایـن روش چارچوبی برای مشارکت گروهی افراد درتصمیم گیری وحل مسائل ایجاد می شود و با مشارکت و مذاکره بـا افـراد مـی تـوان بـرای تصمیم گیری یک ساختار سلسله مراتبی مشخص را تعریف نمود. این مشارکت گروهی سبب افزایش اعتبار نتایج می شـود. اگرچـه به کارگیری و اجرای آن به دلیل تنوع ایده ها کارساده ای نیست، ولی درمورد ایده های هرشخص (شـهودی یـا علمـی) مـی تـوان ازAHP کمک گرفت. این مدل را می توان برای حل مسائل واقعی از قبیل حل تعارض، تخصیص منـابع و... بـه کارگرفـت. امـروزه AHPدر مسائلی ازقبیل برنامه ریزی، تحلیل هزینه فایده، وانتخاب سبدسهام، کاربردفراوانی دارد.

[48]-Thomas L. Saaty

مراحل اجرای تکنیک مذکور عبارتنداز :

مرحله اول : ساختن درخت سلسله مراتبی.

مرحله دوم : تعیین ضریب اهمیت معیارها وزیرمعیارها و وزن دهی به جایگزین ها.

مرحله سوم : ترکیب ضریب اهمیت گزینه ها وترکیب وزن ها.

مرحله چهارم: آزمون سازگاری.

در یک ساختار سلسله مراتبی درفرایند AHP اهداف، معیارها وگزینه ها و ارتباط بین آن ها نشان داده می شود. درخت سلسله مراتبی دارای سه سطح اصلی هدف، معیارها وگزینه ها است که سطح معیار آن قابل تقسیم به زیر معیارهای متعدد می باشد.

- ✓ هدف: دربالاترین سطح درخت سلسله مراتبی قرار دارد و تنها یک پارامتردارد که انتخاب آن وظیفه بالاترین سطح تصمیم گیری پروژه می باشد.
- ✓ معیارها: به ملاک های متضمن و سازنده ی آن، معیارگفته می شود. معیارها، درواقع سنگ محک هدف یا وسیله اندازه گیری آن می باشند. هراندازه معیارها اجزای هدف را بهتر پوشش دهند و بیشتر بیان کننده هدف باشند، احتمال گرفتن نتیجه دقیق تر افزایش می یابد. معیارها دومین سطح درخت سلسله مراتبی پس ازهدف می باشند. دراین سطح می توانیم بنا برضرورت و به تعداد موردنیاز، معیار در سطح افقی ترسیم وتنظیم نماییم. معیارها، قابل تقسیم به زیر معیارها و زیر معیارها قابل تقسیم به زیر معیارهای بعدی می باشند. این وضعیت می تواند بسته به ضرورت تاn زیرمعیار درسطح عمود وافقی افزایش پیدا نماید.
- ✓ گزینه ها: گزینه ها آخرین سطح درخت سلسله مراتبی می باشد و به چگونگی استفاده ازروشAHP بستگی دارد. درمواردی که ازاین تکنیک به منظور انتخاب یا اولویت بندی استفاده می شود، عموما تعیین گزینه ها توسط محقق صورت می گیرد، زیرا اوست که تعیین می کند ازمیان کدام گزینه باید انتخاب صورت گیرد یاچه گزینه هایی باید اولویت بندی شود.

- ✓ – لی وهمکاران [۴۹](۲۰۰۸) شش گام اساسی رادرفرایند تحلیل سلسله مراتبی بیان کرده اند:

۱) شناسایی مشکل وتعیین اهداف ونتایج.

۲) شکستن مسئله به ساختار سلسله مراتبی واجزای تصمیم (هدف، معیار، زیرمعیارها، گزینه های تصمیم).

۳) انجام مقایسات زوجی میان اجزای تصمیم وتشکیل ماتریس مقایس زوجی.

۴) استفاده ازروش بردار ویژه برای محاسبه اوزان نسبی اجزای تصمیم.

۵) بررسی نرخ ناسازگاری ماتریس ها برای اطمینان ازاین امر که نظرات تصمیم گیرندگان سازگاراست.

۶) ترکیب اوزان نسبی به منظور به دست آوردن رتبه نهایی گزینه های تصمیم.

سه اصل اساسی درتفکرتحلیلی وجود دارد که به تصمیم گیری ازطریق AHPمرتبط می شوند. این سه اصل عبارتنداز :

۱- اصل ترسیم درخت سلسله مراتبی.

[49]-Lee A. H. I, Chen, W. C. , Chang C. J

۲- اصل تدوین وتعیین اولویت ها.

۳- اصل سازگاری منطقی قضاوت ها.

همان طورکه اشاره شد، این اصول بایددر AHP مدنظر قرارگیرند. درادامه به شرح هریک از اصول فوق می پردازیم:

- ✓ **اصل ترسیم درخت سلسله مراتب**

انسان توانایی درک موضوعات مختلف، تمیزدادن آن موضوعات و ارتباط دادن اجزای مختلف یک موضوع را دارد. ذهن انسان توانایی ایجاد ساختار سلسله مراتبی را برای موضوعات پیچیده باتوجه به اجزای آن دارد. اغلب اوقات تعداد اجزای سلسله مراتب بین ۵ تا ۹ بخش است، یعنی اینکه ذهن انسان یک موضوع را به بخش های کوچکتر تفکیک کرده وگاهی این بخش ها را به بخش های کوچکتر تقسیم می کند، ضمن آنکه ارتباط منطقی آن هارا نیز درنظرمی گیرد. بدین ترتیب یک سلسله مراتب شکل می گیرد.

- ✓ **اصل تدوین وتعیین اولویت ها**

انسانها می توانند روابط بین موضوعات مشاهده شده را درک کنند و باتوجه به معیارهای شخصی، مقایسه زوجی بین آنها انجام داده ویک گزینه را بردیگر گزینه ها ترجیح دهند، آنگاه این مقایسه ها را ازطریق AHP یا فرآیند منطقی دیگری با هم ترکیب کرده تا درک بهتری ازکل سیستم ارائه دهند.

- ✓ **اصل سازگاری منطقی قضاوت ها**

ذهن انسان می تواند روابط بین اجزا را به نحوی برقرارکند که بین آنها سازگاری و ثبات منطقی وجود داشته باشد. واژه ی سازگاری در دو مفهوم به کارگرفته می شود.

- ✓ ایده ها واشیاء مشابه باتوجه به ارتباط آنها دریک گروه قرار بگیرند.

برای مثال، یک پرتقال ویک توپ تنیس ازنظر معیار، گردی می توانند دریک گروه قرارگیرند، ولی اگر معیارمورد نظر ما طعم باشند، دراین صورت این دو هیچ ارتباطی باهم ندارند.

- ✓ میزان ارتباط بین ایده های مختلف با توجه به معیارخواص آنها می باشد (آذروفرجی، ۱۳۸۹).

اندازه گیری (معیارسنجش)

برای محاسبه اولویت ها به روش علمی، نیاز به مقیاس های اندازه گیری داریم. امروزه اعداد به روش های مختلف برای اندازه گیری انواع مختلف پدیده های فیزیکی به کارمی روند و برای هرکدام واحدهای متفاوتی تعریف شده است. آنچه مهم است این ویژگی ها فیزیکی هستند و معیارهای اندازه گیری آن ها قابل لمس می باشد، ولی دراین جا یک سوال مطرح می شود و اینکه آیا می توان اعداد را به گونه ای منطقی بسط و توسعه داد تا احساسات افراد را درمسائل مختلف اجتماعی، اقتصادی و سیاسی نشان دهند؟

فرایند اندازه گیری اولویت ها به منظور حل مسائل تصمیم گیری انجام می گیرد و برای اندازه گیری اولویت ها باید معیاری را تدوین نمود تا ویژگی های ناملموس را اندازه گیری نماید. برای اندازه گیری اولویت ها هر جزیی با جزء های دیگر مقایسه می شود این اجزا می توانند با یکدیگر کاملا متفاوت باشند. به منظورتبدیل عوامل کیفی به عوامل کمی، باید ازروش های شبه کمی استفاده نمود(همان منبع).

مقایسات زوجی

مقایسات زوجی بدین معنی است که اجزا به صورت زوجی و بر اساس یک معیار خاصی با هم قیاس شوند. برای انجام مقایسات زوجی، استفاده از ماتریس بهترین روش است. روش ماتریس، ابزاری ساده و درعین حال مفید است که چارچوبی برای آزمون سازگاری، اخذ اطلاعات بیشتر از طریق انجام کلیه ی مقایسات ممکن و تحلیل حساسیت اولویت های کلی با اعمال تغییرات درقضاوت ها، ارائه می دهد. برای تکمیل مقایسات زوجی از اعداد استفاده می شود تا اهمیت نسبی هر عنصرنسبت به عناصر دیگر درارابطه با آن خصوصیت مشخص شود، درجدول (۶-۱) مقیاسی معرفی شده توسط چانگ[50] (۱۹۹۶)که نشان دهنده متغیرهای زبانی و کمیتهای عددی متناظر با آن برای انجام مقایسات زوجی نشان داده شده است(همان منبع).

متغییر زبانی	اعداد فازی	معکوس اعداد فازی
اهمیت دقیقا مساوی	(۱و۱و۱)	(۱و۱و۱)
اهمیت تقریبا مساوی	(۳/۲و۱و۱/۲)	(۲و۱و۲/۳)
کمی مهمتر	(۲و۳/۲و۱)	(۱و۲/۳و۱/۲)
مهمتر	(۵/۲و۲و۳/۲)	(۲/۳و۱/۲و۲/۵)
اهمیت خیلی مهمتر	(۳و۵/۲و۲)	(۱/۲و۲/۵و۱/۳)
خیلی خیلی مهمتر	(۷/۲و۳و۵/۲)	(۲/۵و۱/۳و۲/۷)

ترکیب ماتریس های مقایسات زوجی

یکی از بهترین روش ها برای ترکیب ماتریس های مقایسه ای اعضای گروه، استفاده از میانگین هندسی می باشد. میانگین هندسی به محقق کمک می کند، ضمن درنظرگرفتن قضاوت هر عضو، به قضاوت گروه درباره ی هر مقایسه زوجی برسد. ازآنجایی که مقایسات زوجی، داده هایی را به صورت نسبت ایجاد می کند، میانگین هندسی از نظرریاضی بهترین میانگین برای آنهاست. به علاوه معکوس بودن ماتریس مقایسه، استفاده ازمیانگین هندسی را بیشتراز هرچیز دیگر موجه می سازد(همان منبع).

- ✓ **تکنیک AHP فازی براساس روش تحلیل توسعه ای**

نسخه فازی شده تکنیک AHP، دربرگیرنده موقعیت هایی است که مبهم اند یا به درستی تعریف نشده اند. روش های AHP فازی زیادی، بوسیله ی افراد مختلف پیشنهاد شده است، که این روشها رویکردهای سیستماتیکی برای انتخاب گزینه با استفاده ازمفهوم تئوری مجموعه های فازی و تجزیه و تحلیل ساختار سلسله مراتبی هستند. درسال ۱۹۸۳ دو محقق هلندی به نام های لارهورن و پدریک [51]روشی را برای فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی پیشنهاد کردند که براساس روش حداقل مجذورات لگاریتمی

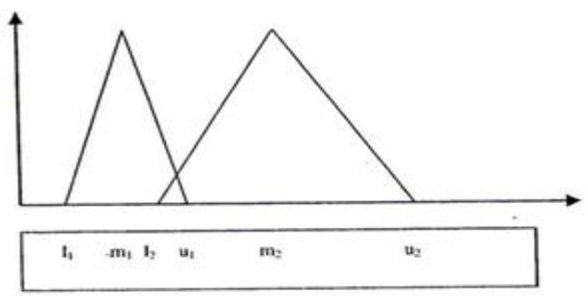
---

[50]-Chang D, 1996.
[51]-Laarhore , padrycz

بنیان نهاده شده بود. میزان محاسبات و پیچیدگی مراحل روش آنها باعث شد مورد اقبال قرارنگیرد. درسال ۱۹۹۶ روش دیگری تحت « عنوان روش تحلیل توسعه ای (EA)[۵۲] توسط یک محقق چینی به نام چانگ(۱۹۹۶) ارائه گردید.

اعداد مورد استفاده دراین روش اعداد مثلثی فازی هستند. در ادامه مفاهیم وتعاریف AHP فازی براساس روش EA تشریح می شود.

دوعددمثلثی $M1=(I_1,m_1,u_1)$ و $M2=(I_2,m_2,u_2)$ که درشکل ۶-۲ رسم شده اند را درنظر بگیرید.



شکل۶-۲ نمایش دو عدد مثلثی فازی

عملگرهای ریاضی آن ها به صورت زیر تعریف می شود:

$$M_1+M_2=(I_1+I_2,m_1+m_2,u_1+u_2) \quad (1)$$

$$M_1\times M_2=(I_1\times I_2,m_1\times m_2,u_1\times u_2) \quad (2)$$

$$M_1^{-1}=(\frac{1}{u_1},\frac{1}{m_1},\frac{1}{I_1}),M_2^{-1}=(\frac{1}{u_2},\frac{1}{m_2},\frac{1}{I_2}) \quad (3)$$

باید توجه داشت که حاصل ضرب دو عدد فازی مثلثی، یا معکوس یک عدد فازی مثلثی دیگر، یک عدد فازی مثلثی نیست. این روابط، فقط تقریبی از حاصل ضرب واقعی دو عدد فازی مثلثی و معکوس یک عدد فازی را بیان می کند .

[52]-Extent Analysis Method

درروش EA برای هریک ازسطرهای ماتریس مقایسات زوجی، مقدار S_K ، که خود یک عدد مثلثی است به صورت زیر محاسبه می شود:

$$S_k = \sum_{j=1}^{n} M_{kl} \times \left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{j1}^{n} M_{ij}\right]^{-1} \quad (٤)$$

که K بیانگر شماره سطر وiوj به ترتیب نشان دهنده گزینه ها وشاخص ها هستند.

در روش EA ، پس از محاسبه S_K ها، بایددرجه بزرگی آنها را نسبت به هم به دست آورد. به طورکلی اگر M_1 و M_2 دو عـدد فازی مثلثی باشند، درجه بزرگی M_1 بر M_2 که با $V(M_1 \geq M_2)$ نشان می دهیم، به صورت زیر تعریف می شود:

(۵)

$$V(M_2 \geq M_1) = \mu_{M2}(d) \begin{cases} 1 = if(M_2 \geq M_1) \\ 0 = if(L_1 \geq U_2) \\ \dfrac{U_2 - L_1}{(U_2 - L_1) - (M_1 - M_2)} = otherwise \end{cases}$$

درغیراین صورت میزان بزرگی یک عدد فازی مثلثی از K عدد فازی مثلثی دیگر نیز ازرابطه زیربدست می آید:

$$V(M_1 \geq M_2,\ldots,M_k) = V(M_1 \geq M_2),\ldots,V(M_1 \geq M_k) \quad (۶)$$

در روش EA برای محاسبه وزن شاخص ها، درماتریس مقایسات زوجی به صورت زیرعمل می کنیم .

$$W'(X_i) = Min\left[V(S_i \geq S_k)\right] K \text{ و } = 1 \text{ و } 2 \text{ و} \ldots \text{ و } n \ldots k \neq i \quad (۷)$$

بنابراین ، بردار وزن شاخص ها به صورت زیر خواهد بود:

$$W' = \left[W'(C_1) \text{ و } W'(C_2) \text{ و} \ldots \text{ و } W'(C_n)\right]^t \quad (۸)$$

که همان بردارضرایب غیربهنجار AHP فازی است.

اینک براساس رابطه (۳-۹)، مقدار اوزان بهنجار (نرمالیزه) شده شاخص های C_1 تا C_n بدست می آید(همان منبع).

$$W_i = \frac{w^{/} i}{\sum w^{/} i} \qquad (۹)$$

مراحل کلی الگوریتم *AHP* فازی به روش آنالیز توسعه *Chang* به صورت زیر است(نگارش۲):

گام ۱- ساختن یک سلسله مراتبی برای مسئله.

گام ۲- تعیین ماتریس های مقایسه زوجی و اعمال قضاوت ها.

می توان مراحل آنالیز توسعه *Chang* را به صورت زیر بیان نمود:

مرحله ۱- به دست آوردن بسط مرکب فازی برای هر هدف.

اگر $M_{g_i}^1, M_{g_i}^2, ..., M_{g_i}^m$، مقادیر آنالیز توسعه i امین هدف به ازای m آرمان باشد، آن گاه بسط مرکب فازی m آرمان برای i هدف، به صورت زیر تعریف می گردد:

$$S_i = \sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^j \otimes [\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^j]^{-1}$$

چنانچه $M_{g_i}^j = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$ باشد، آن گاه $\sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^j$ به وسیله عملگر جمع فازی روی آنالیز توسعه m آرمان، به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^j = (a_{i1}, b_{i1}, c_{i1}) \oplus (a_{i2}, b_{i2}, c_{i2}) \oplus ... \oplus (a_{im}, b_{im}, c_{im})$$

$$= (\sum_{j=1}^{m} a_{ij}, \sum_{j=1}^{m} b_{ij}, \sum_{j=1}^{m} c_{ij}) = (a'_i, b'_i, c'_i)$$

همچنین برای به دست آوردن $[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^j]^{-1}$، با اعمال عملگر جمع فازی، خواهیم داشت:

$$\sum\sum M_{g_i}^{j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}, \sum_{j=1}^{m} b_{ij}, \sum_{j=1}^{m} u_{ij}c\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a'_i, \sum_{i=1}^{n} b'_i, \sum_{i=1}^{n} c'_i\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} c'_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} b'_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a'_i}\right)$$

بنابراین؛

$$S_i = \sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j} \otimes \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j}\right)^{-1}$$

$$= (a_i^{'}, b_i^{'}, c_i^{'}) \otimes \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} c^{'}_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} b^{'}_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a^{'}_i}\right) = \left(\frac{a_i^{'}}{\sum_{i=1}^{n} c^{'}_i}, \frac{b_i^{'}}{\sum_{i=1}^{n} b^{'}_i}, \frac{c_i^{'}}{\sum_{i=1}^{n} a^{'}_i}\right) = (a_i, b_i, c_i)$$

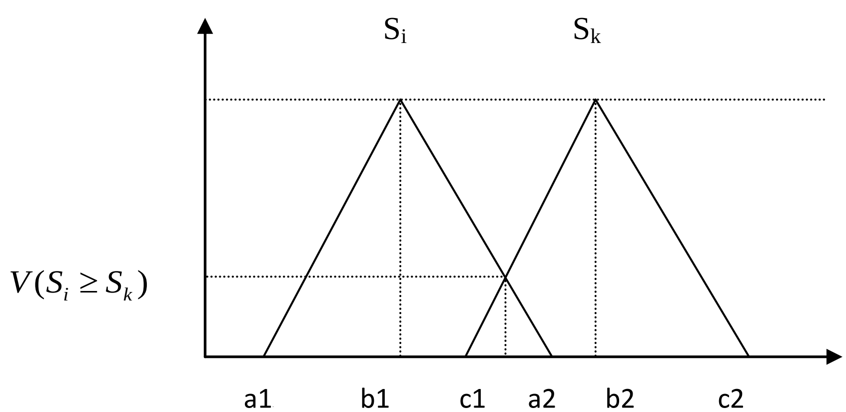
مرحله ۲- محاسبه درجه ارجحیت (درجه امکانپذیری) S_i بر S_k.

چنانچه $S_i = (a_i, b_i, c_i)$ و $S_k = (a_k, b_k, c_k)$ باشد، آن گاه درجه ارجحیت S_i بر S_k که با $V(S_i \geq S_k)$ نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می گردد:

$$V(S_i \geq S_k) = \underset{x \geq y}{SUB}(\min\{\alpha_{S_i}(x), \alpha_{S_k}(y)\})$$

$$V(S_i \geq S_k) = \alpha_{S_i}(d) = \begin{cases} 1 ================\Rightarrow if\ (m_i \geq m_k) \\ 0 ================\Rightarrow if\ (l_k \geq u_i) \\ \dfrac{a_k - c_i}{(b_i - c_i) - (b_k - a_k)} ===\Rightarrow otherwise \end{cases}$$

که d متناظر با بزرگ ترین نقطه تقاطع بین $\alpha_{S_i}, \alpha_{S_k}$ است. شکل ۳-۲، $V(S_i \geq S_k)$ را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲-ارجحیت دو عدد فازی

مرحله ۳- محاسبه درجه ارجحیت (درجه امکانپذیری) یک عدد فازی محدب S که بزرگ تر از k عدد فازی محدب $S_i; i=1,2,...,k$ باشد، به صورت زیر تعریف می گردد:

$$
\begin{aligned}
&V(S \ge S_1, S_2, ..., S_k) = V((S \ge S_1),(S \ge S_2),...(S \ge S_k)) \\
&= \min(V(S \ge S_1), V(S \ge S_2), ..., V(S \ge S_k)) \\
&= \min V(S \ge S_i) \\
&i = 1,2,...,k
\end{aligned}
$$

چنانچه فرض کنیم که $d'(A_i) = \min V(S_i \ge S_k) \quad for(k=1,2,...,n \quad k \ne i)$، آن گاه بردار وزن به صورت زیر به دست می آید:

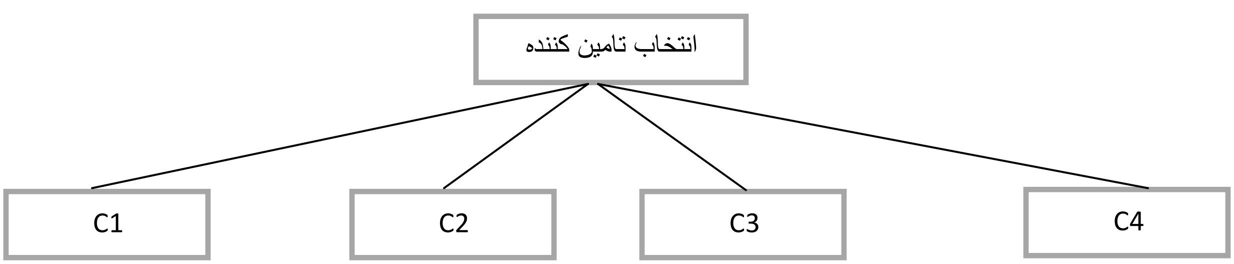
$$W' = (d'(A\ ), d'(A_2), ..., d'(A_n))$$

مرحله ۴- بهنجار نمودن بردار W'' و به دست آوردن وزن بهنجار شده W.

$$W = (d(A\ ), d(A_2), ..., d(A_n))$$

مثال: ماتریس مقایسات زوجی زیر را که برای انتخاب تامین کننده ی مناسب از میان ۴ تامین کننده بوده، و از میانگین نظرات چند خبره به دست آمده را، در نظر بگیرید که درایه های این ماتریس اعداد فازی هستند:

مرحله اول: ترسیم درخت سلسله مراتبی



	C1	C2	C3	C4
C1	(۱و۱و۱)	(۰,۴۶۰۸و۰,۵۵۸۶و۰,۷۰۹۲)	(۰,۴۳۶۶و۰,۵۵۸۶و۰,۷۲۴۶)	(۰,۶۱۳۴و۰,۸۴۷۴و۱,۲۰۴۸)
C2	(۱,۴۱و۱,۷۹و۲,۱۷)	(۱و۱و۱)	(۰,۴۷۶۱و۰,۵۹۱۷و۰,۸۳۳۳)	(۰,۸۴۰۳و۱,۳۸۸۸و۱,۷۸۵۷)
C3	(۱,۳۸و۱,۷۹و۲,۲۹)	(۱,۲۰و۱,۶۹و۲,۱۰)	(۱و۱و۱)	(۱,۰۴۱۶و۱,۳۱۵۷و۱,۶۳۹۳)
C4	(۰,۸۳و۱,۱۸و۱,۶۳)	(۰,۵۶و۰,۷۲و۱,۱۹)	(۰,۶۱و۰,۷۶و۰,۹۶)	(۱و۱و۱)

مرحله دوم: محاسبه S_i برای هر یک از سطرهای ماتریس مقایسه زوجی

$$S_i = \sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j} \otimes [\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j}]^{-1}$$

S1	۰,۱۱۸۲۲۸	۰,۱۷۲۴۵۳	۰,۲۶۱۰۴۱
S2	۰,۱۷۹۲۳۵	۰,۲۷۷۵۰۳	۰,۴۱۵۳۱۶
S3	۰,۲۱۷۶۲۱	۰,۳۳۷۱۴۰	۰,۵۰۴۲۹۷
S4	۰,۱۴۱۲۶۴	۰,۲۱۲۹۰۵	۰,۳۴۲۹۲۸

مرحله سوم: مقایسه درجه بزرگی برای هر یک از مقادیر S_i نسبت به همدیگر

$$V(S_i \geq S_k) = \alpha_{S_i}(d) = \begin{cases} 1 ================\Rightarrow if\ (m_i \geq m_k) \\ 0 ================\Rightarrow if\ (l_k \geq u_i) \\ \dfrac{a_k - c_i}{(b_i - c_i)-(b_k - a_k)} ===\Rightarrow otherwise \end{cases}$$

S1> S2	۰,۴۳۷۷	S2> S1	۱	S3> S1	۱	S4> S1	۱
S1> S3	۰,۲۰۸۶	S2> S3	۰,۷۶۸۴	S3> S2	۱	S4> S2	۰,۷۱۷۰
S1> S4	۰,۷۴۷۸	S2> S4	۱	S3> S4	۱	S4> S3	۰,۵۰۲۲

مرحله چهارم: محاسبه وزن غیر نرمال و نرمال

وزن غیر نرمال معیارها

وزن غیر نرمال	معیار
۰,۲۰۸۶	C1
۰,۷۶۸۴	C2
۱	C3
۰,۵۰۲۲	C4

وزن نرمال معیارها

وزن نرمال	معیار
۰,۰۸۴۱	C1
۰,۳۰۹۹	C2
۰,۴۰۳۴	C3
۰,۲۰۲۶	C4

تاپسیس فازی

تفکرات انسان همراه با عدم قطعیت است و این عدم قطعیت در تصمیم گیری تاثیر گذار است. برای همین از روش های تصمیم گیری فازی استفاده می شود. یکی از این روش ها، روش تاپسیس[۵۳] فازی است.تاپسیس فازی اولین بار توسط چن و هونگ در سال ۱۹۹۲ ابداع شد. منطق تاپسیس، تعریف راه‌حل‌های ایده‌آل مثبت و منفی است. راه‌حل ایده‌آل مثبت، معیارهایی مانند سود را حداکثر و معیارهایی مانند هزینه را حداقل می‌نماید. راه‌حل ایده‌آل منفی، معیارهای هزینه را حداکثر و معیارهای سود را حداقل می‌کند. گزینه ی بهینه، نزدیکترین گزینه به راه‌حل ایده‌آل مثبت و دورترین گزینه از راه‌حل ایده‌آل منفی است. راه‌حل ایده‌آل مثبت، ترکیبی از بهترین ارزشهای قابل دسترس معیارهاست، در حالی که راه‌حل ایده‌آل منفی، شامل بدترین ارزش‌های قابل دسترس معیارهاست.

مراحل تاپسیس فازی

اساس TOPSIS بر آن است که گزینه انتخابی باید کمترین فاصله را با ایده ال مثبت و بیشترین فاصله را با ایده ال منفی داشته باشد [۱۱]

[53] TOPSIS

در اینجا ما این روش را بر طبق مراحل ذیل برای رتبه بندی تامین کنندگان پیشنهاد داده ایم:

مرحله ۱- بدست آوردن بردار اوزان $\tilde{w}_j$ با استفاده از ahp فازی $w_j, j=1,2,\ldots,n$

مرحله۲- بهنجار کردن ماتریس به دست آمده از نظر سنجی توسط خبره در رابطه با تامین کنندگان

که ماتریس جدیدی به شرح زیر میباشد: $\tilde{R} = \left[\tilde{r}_{ij}\right]_{m\times n}$

$B \subseteq \{1,\ldots,n\}$ مربوط به شاخص هایی که در رابطه با سود است.

$C \subseteq \{1,\ldots,n\}$ مربوط به شاخص هایی که در رابطه با هزینه است.

$$\begin{cases} r_{ij} = \left(\dfrac{a_{ij}}{c_j^*}, \dfrac{b_{ij}}{c_j^*}, \dfrac{c_{ij}}{c_j^*}\right), & j \in B \\ r_{ij} = \left(\dfrac{c_j^-}{c_{ij}}, \dfrac{c_j^-}{b_{ij}}, \dfrac{c_j^-}{a_{ij}}\right), & j \in C \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_j^* = \max\limits_i c_{ij} & \text{if} \quad j \in B \\ c_j^- = \min\limits_i a_{ij} & \text{if} \quad j \in C \end{cases}$$

مرحله۳- بنابراین، ماتریس وزن دهی شده به شکل زیر می شود:

$$\tilde{V} = \left[\tilde{v}_{ij}\right]_{m\times n}, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$\tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij} \otimes \tilde{w}_j$$

مرحله ۴- تعیین راه حل ایده ال فازی مثبت $\tilde{v}_j^*$ (FPIS)وایده ال فازی منفی $\tilde{v}_j^-$(FNIS):

$$\tilde{v}_j^* = \begin{cases} \max\limits_{i=1,\ldots,m} \tilde{v}_{ij};\ j \in B \\ \min\limits_{i=1,\ldots,m} \tilde{v}_{ij};\ j \in C \end{cases}$$

$$\tilde{v}_j^- = \begin{cases} \min\limits_{i=1,\ldots,m} \tilde{v}_{ij};\ j \in B \\ \max\limits_{i=1,\ldots,m} \tilde{v}_{ij};\ j \in C \end{cases}$$

$$FPIS = \{\tilde{v}_j^* \mid j = 1,\ldots,n\}$$

$$FNIS = \{\tilde{v}_j^- \mid j = 1,\ldots,n\}$$

مرحله ۵- محاسبه ی فواصل اندازه ها با استفاده از فاصله اقلیدسی فازی:

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2\right]}$$

جدایی هر تامین کننده از ایده ال مثبت و منفی با این رابطه محاسبه و به صورت زیر تعریف میشود:

$$d_i^* = \sum_{j=1}^{n} d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^*), \mathrm{i} = 1,\ldots,m$$

$$d_i^- = \sum_{j=1}^{n} d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-), \mathrm{i} = 1, \ldots, m$$

مرحله ۶- محاسبه نزدیکی نسبی به ایده ال و رتبه بندی:

$$CI_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^*} \quad ,$$

مثال:

شرکتی برای ارزیابی تامین کنندگان خود از روش تاپسیس فازی استفاده می کند. بدین منظور از جدول زیر برای ارزیابی گزینه ها استفاده می کند.

(1,1,3)	بسیار نامطلوب
(1,3,5)	نامطلوب
(3,5,7)	مطلوبیت متوسط
(5,7,9)	مطلوب
(7,9,9)	بسیار مطلوب

با استفاده از جدول بالا ماتریس تصمیم زیر بدست آمد.

	کیفیت	تحویل به موقع	قیمت
S1	(3,5,7)	(3,5,7)	(1,3,5)
S2	(1,1,3)	(1,3,5)	(5,7,9)
S3	(3,5,7)	(1,1,3)	(3,5,7)
S4	(3,5,7)	(1,3,5)	(1,3,5)
S5	(7,9,9)	(3,5,7)	(5,7,9)
S6	(5,7,9)	(5,7,9)	(1,1,3)

پس از بهنجار کردن ماتریس گزینه ها، اقدام به تشکیل ماتریس $\tilde{v}$ که حاصل ضرب ماتریس بهنجار شده ی گزینه ها با ماتریس اوزان می باشد، نمودیم:

کیفیت	تحویل به موقع	هزینه

S1	(.042082.1456.8295)	(.0226,.0843,.3101)	**(.0465,.1525,.3618)**
S2	(.0233,.0624,.1659)	(.0075,.0506,.2215)	**(.0155,.3,.155)**
S3	(.03,.0873,.2765)	(.0075,.0168,.1329)	**(.0465,.1525,.3618)**
S4	(.042,.1456,.8295)	.0075,.0506,.2215)	**(.0465,.1525,.3618)**
S5	(.0233,.0624,.1659)	.0226,.0843,.3101)	**(.1086,.2746,.4652)**
S6	(.0701,.4368,.8295)	(.0377,.118,.3988)	**(.0776,.2135,.4652)**

پس از محاسبه ی ماتریس بهنجار و وزن دهی شده مراحل ۴و ۵ و۶ TOPSIS فازی d_i^* و d_i^- محاسبه شده و cli^+ محاسبه و در نهایت، گزینه ها رتبه بندی می شوند که در جدول ۵ نشان داده شده است.

جدول -راه حل های ایده آل فازی مثبت و منفی

	هزینه	**تحویل به موقع**	**کیفیت**
FPIS	(.0233,.0624,.1659)	(.0377,.118,.3988)	**(.1086,.2746,.4652)**
FNIS	(.0701,.4368,.8295)	(.0075,.0168,.1329)	**(.0155,.3,.155)**

جدول – نتیجه نهایی TOPSIS

	d_i^*	d_i^-	CI_i
S1	1.11481	0.769307	**0.408312**
S2	0.7665	0.331327	**0.301802**
S3	0.574999	0.759198	**0.56903**
S4	1.083261	1.358192	**0.556305**
S5	0.142591	0.953714	**0.869935**
S6	0.985046	1.659995	**0.627588**

با توجه به جدول ۸ رتبه بندی گزینه ها بدین صورت که در جدول ۹ نشان داده شده است

جدول۹-رتبه بندی تامین کنندگان

رتبه	**تامین کنندگان**	CI_i
1	S5	**0.869935212**
2	S6	**0.627587563**
3	S3	**0.569030037**
4	S4	**0.556304883**

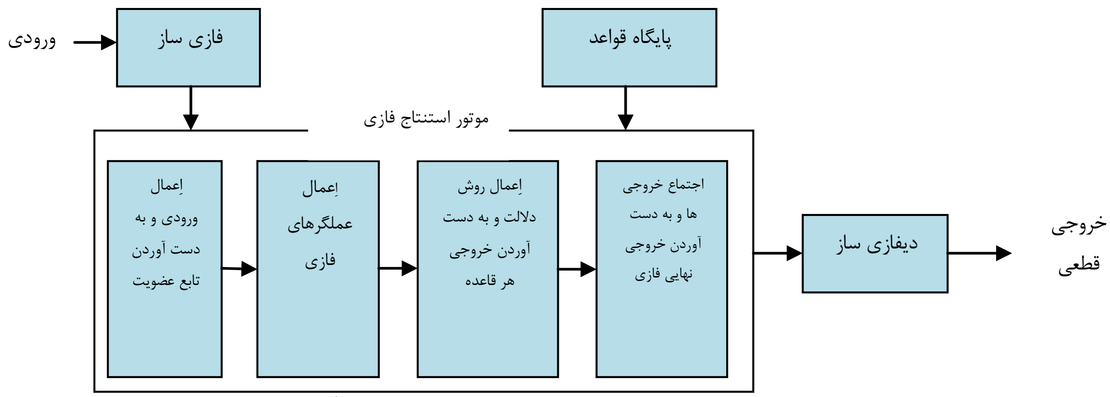
5	S1	**0.408311796**
6	S2	**0.301802326**

جدول، نشان دهنده ی رتبه بندی تامین کنندگان با استفاده از اوزانی که توسط تحلیل سلسله مراتبی فازی بدست آمده، می باشد.
اگر از این اوزان استفاده نشده و به تمام معیارها یک اهمیت داده شود، محاسبات به صورت زیر میباشد.

سیستم استنتاج فازی

سیستم استنتاج فازی، یک فرآیند سیتماتیک برای تبدیل یک پایگاه دانش به یک نگاشت غیر خطی را فراهم می آورد. به همین دلیل از سیستم‌های مبتنی بر دانش (سیستم‌های فازی) در کاربردهای مهندسی وتصمیم گیری استفاده می شود(غفار زاده دیزجی، ۱۳۸۸). ممدانی و اصیلیان درسال ۱۹۷۵ برای کنترل ترکیب یک موتوربخار و بویلر با استفاده ازترکیب قواعدکنترل زبانی که درتجربیات عملگرهای انسانی وجود داشت، از سیستم استنتاج فازی استفاده کردند(ممدانی واصیلیان،۱۹۷۵).
یک سیستم فازی دارای اجزای زیر است:
۱)یک فازی ساز در ورودی که مقدار عددی متغیرها را به یک مجموعه فازی تبدیل می کند.
۲)پایگاه قواعد فازی که مجموعه ای از قواعد اگر- آنگاه است.
۳)موتور استنتاج فازی که ورودی‌ها را با یک سری اعمال به خروجی تبدیل می کند.
۴)دیفازی ساز که خروجی فازی را تبدیل به یک عدد قطعی می کند.

شکل زیر مراحل یک سیستم استنتاج فازی را نشان می دهد.



مراحل یک سیستم استنتاجی فازی(فونگ[54] و همکاران، ۲۰۱۰)

۱- فازی سازی: در این مرحله، متغیر های ورودی به توابع عضویت فازی تبدیل می گردند.توابع عضویت انـواع مختلفـی دارند، مانند: مثلثی، ذوزنقه ای، نمایی و هاپربولیک. دو نوع مثلثی و ذوزنقه ای از معروف ترین انـواع توابـع عضـویت می باشند.

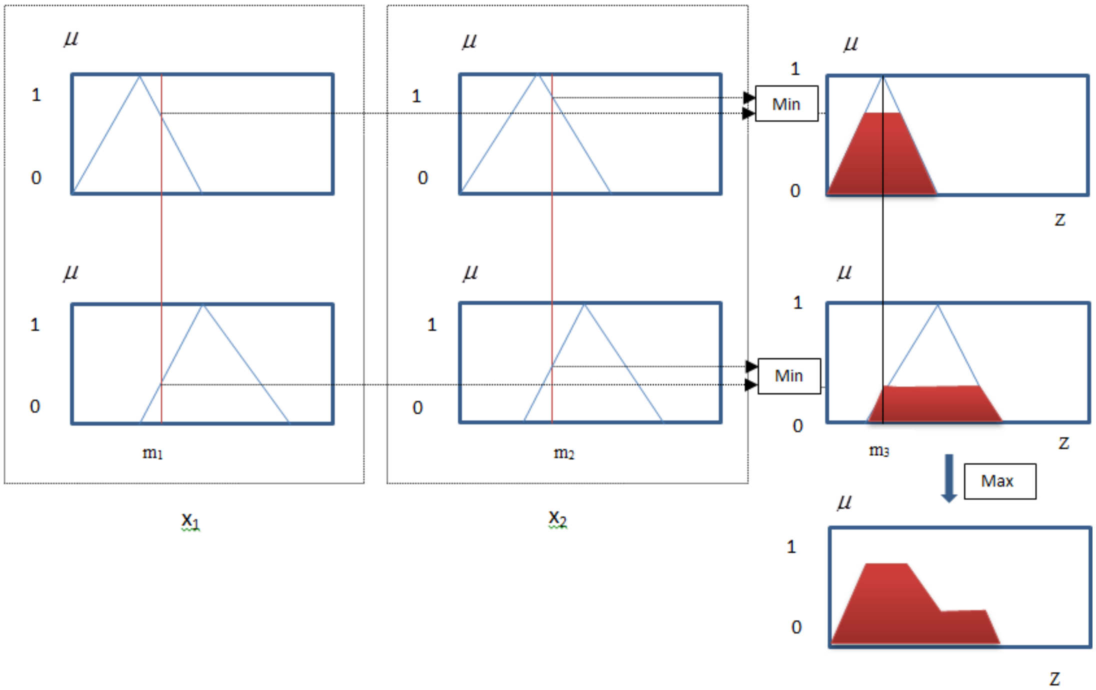
۲- پایگاه قواعد فازی: این قسمت، مهمترین بخش سیستم استنتاج فازی می باشد. در این مرحله قواعـد "اگـر- آنگـاه" فازی بر اساس نظر خبرگان ساخته می شود، گفته می شود که قلب سیستم استنتاج فازی را تشکیل می دهد. بـرای مثال، دو متغیر ورودی x_1و x_2 را درنظر بگیرید و متغیر Z را به عنوان خروجی لحاظ کنید. قانون زیر می توانـد بـه عنوان مثال برای این متغیرها نوشته شود:

If x_1 is m_1 and x_2 is m_2, Z is m_3.

۳- موتور استنتاج فازی

موتور استنتاج فازی مسئول بدست آوردن یک جمع بندی فازی بر اساس قواعد تعریف شده می باشد. همانطوری که در شکل زیر نشان داده شده است یک سیستم استنتاج فازی براساس قواعد ماکسی- مین کار می کند.

[54] FoongK,Chuah T andLee W.



۴- فازی زدایی: فرآیندی است که خروجی سیستم استنتاج فازی را به یک عدد قطعی تبدیل مـی کنـد. بنـابراین ورودی فرآیند دیفازی، یک مجموعه فازی(حاصل اجتماع مجموعه های فازی خروجی) و خروجی آن یک عدد است. با وجود این که فازی سازی به ارزش گذاری در مراحل میانی کمک می کند، خروجی نهایی مـورد علاقـه بـرای هـر متغیر تنها یک عدد است. روش های مختلفی مانند مرکز ثقل۵۵، نیمساز، نصف ماکزیمم، (میـانگین مقـدار مـاکزیمم مجموعه فازی)، بزرگترین ماکزیمم و کوچکترین ماکزیمم برای دیفازی کردن وجود دارد، اما روش مرکز ثقـل رایـج ترین روش است که استفاده می شود(رویچودهاری و پدریس، ۲۰۰۷).

$$COG = \frac{\int_a^b \mu_A(x).x \; dx}{\int_a^b \mu_A(x) \; dx}$$

٤-Center Of Gravity(COG)

فصل هفتم: تئوری و سیستم های صف و کاربرد آنها در صنعت و خدمات

یکی از مسائل مهم در ارائه ی خدمت و انجام سفارشات، انتظار مشتریان و قطعات در صف برای دریافت خدمت و یا انجام مراحل تولید است. گاهی اوقات، مشاهده می شود که تعداد خدمت دهندگان نسبت به مشتریانی که در انتظار خدمت هستند بسیار کم است، که باعث می شود مشتری مدت زمان زیادی را در صف سپری کند. نقطه ی مقابل این حالت نیز وجود دارد که در آن هیچ مشتری منتظر دریافت خدمت نیست که در این حالت خدمت دهندگان بیکار می مانند. انتظار در صف هرچند بسی ناخوشایند است، اما متاسفانه بخشی از واقعیت اجتناب ناپذیر زندگی را تشکیل می دهد. انسانها، در زندگی روزمره ی خود با انواع مختلف صف که به از بین رفتن وقت، نیرو و سرمایه ی آنها می انجامد، روبه رو می شوند. اوقاتی که در صف های اتوبوس، ناهار خوری، خرید و نظایر آن هدر می رود، نمونه های ملموسی از این نوع اتلافها در زندگی است.

اگرچه هیچگاه نمی توان صف را کلاً از میان برد، اما می توان ضایعات ناشی از آن را حتی الامکان کاهش داد. بنابراین باید طوری به این مساله پرداخت که در آن تعیین تعداد خدمت دهندگان و چگونگی خدمت دهی بر پایه هزینه- منفعت باشد. هدف از به کارگیری تئوری صف، حداقل کردن هزینه های انتظار مشتری و هزینه ی ظرفیت خدمت دهی است.

تفاوت مهم در دو واژه سیستم و صف که در این تئوری بسیار زیاد مطرح می شوند:

سیستم: تعداد مشتریان و سفارشاتی که هم در حال دریافت خدمت هستند و هم در انتظار دریافت خدمت هستند.

صف: تعداد مشتریان و سفارشاتی که در انتظار دریافت خدمت هستند.

- سیستم صف: یک سیستم صف را می‌توان به صورت مشتریانی تعریف کرد که برای سرویس گرفتن وارد سیستم می‌شوند و اگر سرویس در اختیار نباشد برای آن منتظر می‌مانند و پس از انجام سرویس سیستم را ترک میکنند.
- هزینه ظرفیت خدمت دهی: هزینه های مربوط به فراهم کردن امکانات خدمات دهی و افزایش رفاه خدمت به مشتری را می گویند. برای مثال افزایش باجه های خدمات دهی در بانک.
- هزینه انتظار مشتریان: هزینه های مربوط به فضا(مکان) و زمان تخصیص داده شده به مشتری در صف را می گویند. برای مثال هزینه ی مربوط به اتاق انتظار (لابی) در یک هتل.

برای سنجش عملکرد یک سیستم صف از سه معیار زیر بهره می‌گیرند:

۱. طول صف: طبیعی است که تشکیل صف هزینه زا است. از طرفی سازمان مجبور است فضایی برای انتظار مشتریان قرار دهد (مانند اتاق انتظار)، بنابراین تعداد مشتریانی که در صف منتظر دریافت خدمت هستند و یا تعداد مشتریان داخل سیستم، معیاری برای ارزیابی سیستم صف محسوب می‌شوند.

۲. زمان انتظار هر مشتری در صف یا سیستم: رضایت حضور مشتری با میزان حضورش در سیستم رابطه عکس دارد به این معنی که حضور مشتری در صف، هزینه از دست دادن مشتری را به سازمان تحمیل می‌کند. بنابراین هزینه زمان انتظار در صف و مدت زمان دریافت سرویس، یکی از معیارهای مهم ارزیابی صف است.

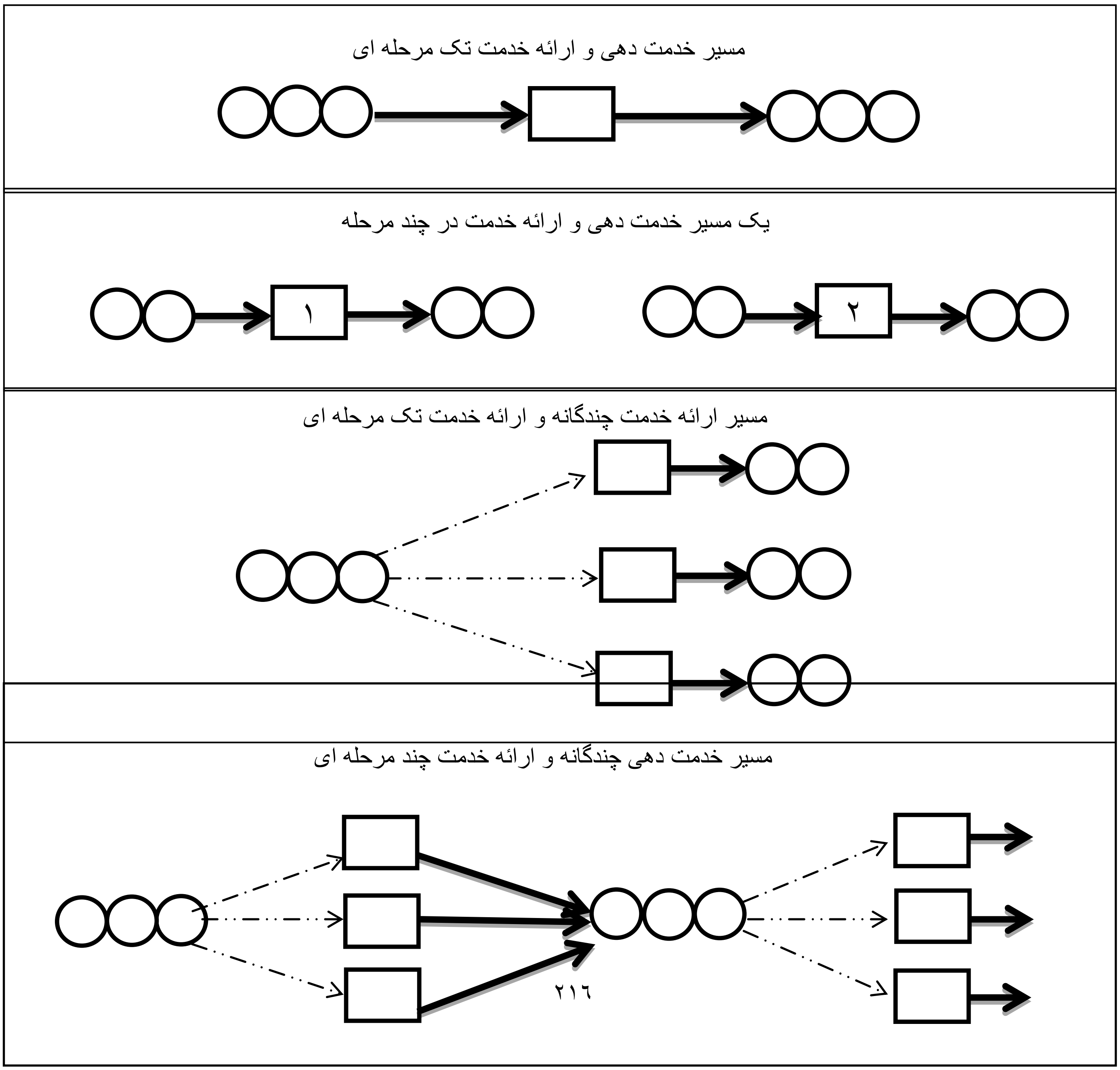
۳. درصدی از زمان که سیستم به علت نبودن مشتری بیکار است: سازمان برای حضور هر خدمت دهنده در سیستم هزینه ای به صورت ثابت یا متغیر تخصیص می دهد که جزئی از هزینه‌های سازمان است. بنابراین، سازمان علاقه دارد تا درصد بیکاری سرورها را به حداقل ممکن برساند.

ویژگی های سیستم صف:

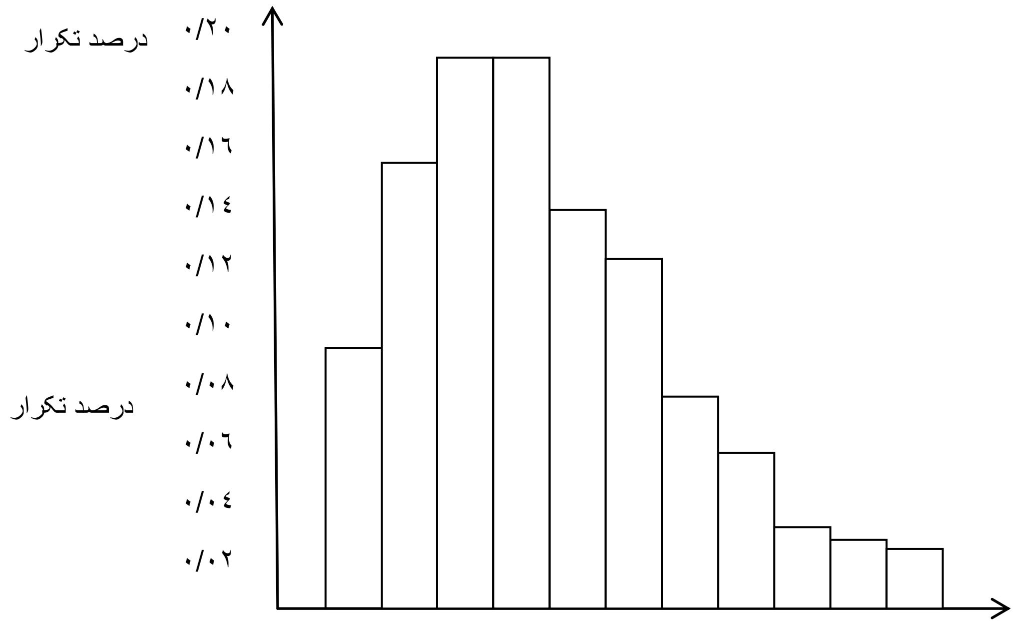
به طور کلی سیستم صف دارای خصوصیات و ویژگی های است که در زیر آمده است:

۱. اندازه یا جمعیت ورودی ها: اندازه یا جمعیت موجود در صف می تواند محدود یا نامحدود باشد. منظور از جمعیت محدود، این است که تعداد مشتریان بالقوه به اندازه ظرفیت و یا محدود باشد (برای مثال تعمیرگاه خودرو) و در مقابل منظور از جمعیت نامحدود این است که تعداد مشتریان بالقوه فراتر از ظرفیت سیستم باشد(برای مثال رستوران ها و یا داروخانه ها).

۲. مسیرهای خدمت دهی و تعداد خدمت دهی : انواع تعداد و مسیرهایی که مدنظر است، در زیر آمده است:

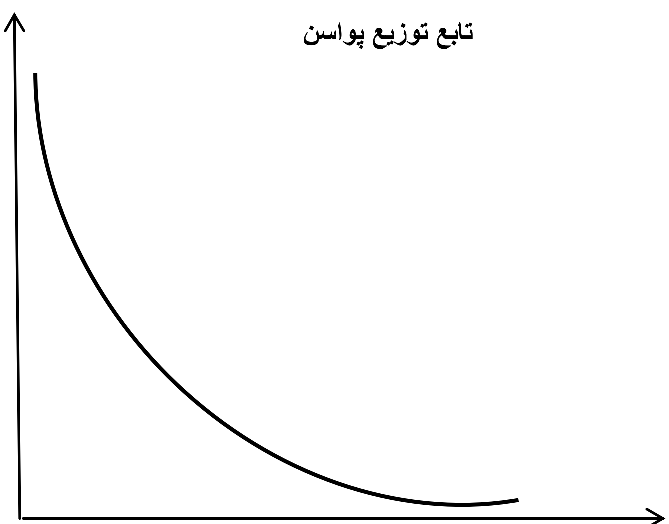


۳. الگوی ارائه خدمت و الگوی ورود مشتریان: متداول ترین الگوی نرخ ورود مشتریان به سیستم از توزیع پواسن پیروی می کند و مدت زمان ارائه خدمت نیز دارای توزیع تابع نمایی منفی است. این نکته حائز اهمیت است ک خدمت باید در یک نرخ قابل رقابت با نرخ ورود مشتری صورت بگیرد.



زمان

تابع توزیع پواسن



۴. قاعده انتخاب واحد بعدی برای ارائه خدمت: منظور از این قاعده، ترتیبی است که به مشتریان خدمت داده می شود که متداول ترین آن مورد اول است.

تابع توزیع نمایی منفی

۱. اولین وارده اولین خدمت (FCFS).

۲. تقدم تخصیص ها در مواجه با شرایط حساس نسبت به اهداف سیستم، در این حالت پاسخ گویی به مشتری ویژه زودتر انجام می شود.(اورژانس بیمارستان).
۳. آخرین وارده اولین خدمت (LCFS).
۴. استفاده از قوانین دیگر با توجه به ماهیت خدمت و مشتری.

ارزیابی عملکرد سیستم:

نحوه ارزیابی سیستم با استفاده از پارامترهای زیر صورت می گیرد:

- متوسط تعداد مشتریان در سیستم یا صف.
- متوسط زمان انتظار مشتری در سیستم یا صف.
- کارایی سیستم یا درصدی از ظرفیت که مورد استفاده قرار گرفته است.
- احتمال اینکه در سیستم هیچ مشتری نباشد یا احتمال اینکه چند مشتری در سیستم باشد.

- **خلاصه پارامترهای ارزیابی عملکرد:**

علائم	مشخصات	علائم	مشخصات
λ	متوسط نرخ ورود مشتریان	ρ	نرخ بهره وری (راندمان) سیستم
μ	متوسط زمان خدمت دهی	P_0	احتمال اینکه در سیستم مشتری نباشد
L_s	متوسط تعداد مشتریان در سیستم	P_n	احتمال اینکه در سیستم مشتری باشد
L_q	متوسط تعداد مشتریان در صف	M	تعداد مسیرهای خدمت دهی
W_s	متوسط زمان انتظار مشتری در سیستم	$1/\mu$	مدت زمان خدمت دهی
W_q	متوسط زمان انتظار مشتری در صف	L_{Max}	تعداد روز و انتظار در صف

ساختار تسهیلات خدمت

این ساختار به صورت زیر مشخص میشود:

1. تعداد کانال در هر مرحله: تعداد ارائه دهندگان خدمت، به طور موازی در هر مرحله از تولید، سطح حداکثر ظرفیت را تعیین می کند.
   - مرحله ی تک کانال: امکان خدمت به یک واحد، در یک زمان را فراهم می کند.
   - مرحله چند کانال: امکان خدمت همزمان برای تعداد زیادی را، مثلا n واحد در یک زمان فراهم می کند.
2. تعداد مراحل در سیستم: مراحل متوالی که یک واحد بایستی قبل از این که یک فرایند تکمیل گردد از آن بگذرد، که ممکن است به شکل های زیر باشد:
   - تک مرحله – تک کانال
   - تک مرحله – چند کانال
   - چند مرحله – تک کانال
   - چند مرحله – چند کانال

مدل های صف به صورت تک مرحله – تک کانال:

مدل ۱. نرخ ورود مشتریان بر اساس تابع پواسن، مدت زمان خدمت دهی بر اساس تابع توزیع نمایی با یک مسیر خدمت دهی، ساده ترین مدل تئوری صف است که سیستم دارای یک خدمت دهنده و روش خدمت دهی، براساس ترتیب ورود مشتری است.

فرضیات تعیین شده برای این مدل:

۱. نرخ ورود مشتری براساس تابع توزیع پواسن با میانگین λ.

۲. مدت زمان خدمت دهی براساس تابع توزیع نمایی با میانگین μ.

۳. طول صف نامحدود.

۴. جمعیت نا محدود.

نحوه محاسبه پارامترهای مربوط به ارزیابی عملکرد سیستم:

متوسط تعداد مشتریان در سیستم	$Ls = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
متوسط تعداد مشتریان در صف	$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$
متوسط زمان انتظار مشتریان در صف	$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{L_q}{\lambda}$
متوسط زمان انتظار مشتریان در سیستم	$Ws = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{L_s}{\lambda} = Wq + \frac{1}{\mu}$

راندمان سیستم	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
احتمال اینکه در سیستم مشتری نباشد	$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$
احتمال اینکه n مشتری باشد	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$
احتمال اینکه خدمت دهنده بیکار باشد و مشتری بلافاصله خدمت دریافت کند	$I = 1 - \rho$

مثال۱) در یک فروشگاه کوچک یک صندوقدار خدمت ارائه می دهد. نرخ ورود مشتری براساس تابع توزیع پواسن و به طور متوسط ۱۲ نفر در ساعت است و متوسط زمان خدمت دهی ۴ دقیقه یا ۱۵ مشتری در ساعت است. مدیر فروشگاه می خواهد بداند که وضعیت صف در این فروشگاه چگونه است.

متوسط زمان خدمت دهی 4 دقیقه یا $\mu = 15$ متوسط تعداد مشتری در سیستم $\lambda = 12$

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{12}{15-12} = 4$$

به طور متوسط 4 مشتری در سیستم وجود دارد:

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{12^2}{15(15-12)} = 3/2$$

- به طور متوسط 3/2 مشتری در صف موجود است
- متوسط زمانی که مشتری در سیستم است

$$Ws = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{15-12} = 0/33$$ ***ساعت19/8دقیقه***

- متوسط زمانی که مشتری در صف است

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{12}{15(15-12)} = 0/26$$ ***ساعت 16دقیقه***

- راندمان فروشگاه

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{15} = \%80$$

- احتمال اینکه در سیستم مشتری نباشد

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \left(1 - \frac{12}{15}\right) = \%20$$

• احتمال اینکه یک مشتری در سیستم باشد. (n =1)

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \left(\frac{12}{15}\right)^1 \left(1 - \frac{12}{15}\right) = 0/16$$

• احتمال اینکه مشتری بلافاصله خدمت دریافت کند:

$$I = 1 - \rho = 1 - 0/80 = 0/20$$

مدل ۲. نرخ ورود مشتریان براساس تابع توزیع پواسن، مدت زمان خدمت دهی ثابت و مسیر خدمت دهی یک مرحله ای

اگر مدت زمان خدمت دهی برای هر مشتری ثابت باشد، متوسط تعداد مشتریان در صف و متوسط زمان انتظار مشتریان در صف به میزان $\frac{1}{2}$ کاهش پیدا می کند. کلیه ی رابطه ها مانند مدل قبل است و تنها نحوه محاسبه L_q به صورت زیر است:

متوسط تعداد مشتری در صف	$Lq = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)}$

مثال۲) در یک کارخانه مدت زمان تعمیر هر دستگاه ۳ دقیقه است.نرخ ورود هر دستگاه به قسمت تعمیر بر اساس تابع توزیع پواسن با متوسط ۶ دستگاه در ساعت است. مطلوب است:

a) متوسط تعداد دستگاه های موجود در صف

b) متوسط زمانی که دستگاه ها در صف و در سیستم منتظر هستند.

$\lambda=6$

$\mu=\frac{6}{3}=20$ $\frac{\text{دستگاه}}{\text{تعداد دستگاه در هرساعت}}$

• متوسط تعداد دستگاه در صف

$$Lq = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)} = \frac{6^2}{2(20)(20-6)} = 0/064$$

• متوسط زمان انتظار دستگاه در صف

$$Wq = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0/064}{6} = 0/010$$

• متوسط زمان انتظار دستگاه در سیستم

$$Ws = Wq + \frac{1}{\mu} = 0/010 + \frac{1}{20} = 0/06$$ ساعت

$$0/06 \times 60 = 3/6$$ دقیقه

مدل ۳. نرخ ورود مشتریان براساس تابع توزیع پواسن، مدت زمان خدمت دهی نمایی و مسیر خدمت دهی چندگانه و یک مرحله ای

از این مدل، زمانی استفاده می شود که در هر مسیر، فقط یک خدمت دهنده به صورت مستقل خدمت می کند. مانند باجه های بانک.

فرضیات تعیین شده برای این مدل:

۱. نرخ ورود مشتریان براساس تابع توزیع پواسن، مدت زمان خدمت دهی نمایی است.
۲. قاعده حاکم به ترتیب ورود مشتری در هر مسیر است.
۳. انتخاب مسیرهای صف به دلخواه و به عهده مشتری است.

با توجه به فرضیات تعیین شده، نحوه ی محاسبه ی پارامترهای ارزیابی عملکرد به صورت زیر تغییر می کند:

متوسط تعداد مشتری در صف	$L_q = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M}{(M-1)!(M\mu-\lambda)^2} P_0$
احتمال اینکه در سیستم مشتری نباشد	$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M}{M!\left(1-\frac{\lambda}{M\mu}\right)}\right]^{-1}$
مدت زمان انتظار برای ورود مشتری	$Wa = \frac{1}{M\mu-\lambda}$
احتمال اینکه مشتری بلا فاصله خدمت دریافت نکند و منتظر دریافت خدمت باشد	$P_w = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \frac{P_0}{M!\left(1-\frac{\lambda}{M\mu}\right)}$

مثال۳) در یک بانک ۵ مسیر به باجه ها وجود دارد، نرخ ورود مشتریان دارای تابع توزیع پواسن بوده و میانگین ۱۱ نفر در ساعت است.مدت زمان خدمت دهی براساس تابع توزیع نمایی بوده و به طور متوسط ۸/۵۷ مشتری در ساعت است. پارامترهای مورد نظر برای ارزیابی سیستم را محاسبه کنید.

$\lambda=11$ **نرخ ورود مشتری در ساعت**

$M=5$ **تعداد مسیر**

$\mu=8/75$ **متوسط زمان خدمت دهی برای هر مشتری**

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{11}{8/75}=1/28\approx1/3$$

با توجه به جداول فوق محاسبه به صورت زیر است :

$L_q = 0/004$

- احتمال اینکه در سیستم مشتری نباشد:

$P_0 = 0/272$

- مدت زمان انتظار مشتری در صف:

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{0/004}{11}=0/0003$$

- مدت زمان انتظار مشتری در سیستم:

$$Ws = Wq + \frac{1}{\mu} = 0/003 + \frac{1}{8/75} = 0/1170$$

- مدت زمان انتظار برای مشتری بعدی که بلافاصله خدمت دریافت نکند:

$$Wa = \frac{1}{M\mu-\lambda} = \frac{1}{5(8.75)-11} = 0/031$$

- احتمال اینکه مشتری وارد شده منتظر دریافت خدمت باشد:

$$0/010= P_w = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \frac{P_0}{M!\left(1-\frac{\lambda}{M\mu}\right)} = \left(\frac{11}{8/75}\right)^5 \frac{0/272}{5!\left(1-\frac{11}{5\times8/75}\right)}$$

مدل ۳. نرخ ورود مشتریان براساس تابع توزیع پواسن، مدت زمان خدمت دهی نمایی و مسیر خدمت دهی چندگانه و یک مرحله ای و ارائه خدمت براساس اولویت گذاری به مشتریان:

در برخی از سازمان ها ارائه خدمت به ترتیب ورود مشتریان نیست، بلکه براساس نظام حاکم مورد قبول سازمان و با اولویت دهی به مشتری انجام می شود. یعنی مشتریان یا سفارشات وارده طبقه بندی شده و مشتریان متناسب با وضعیتشان به ترتیب در گروه های متفاوت اولویت بندی می شوند، تا به آنها خدمت داده شود.

تمام فرضیات این مدل همانند مدل ۳ است و تنها در نظام حاکم صدق می کند، که در اینجا اولویت گذاری مشتری است.

بهره وری سیستم	$\rho = \dfrac{\lambda}{M\mu}$
	$A = \dfrac{\lambda}{(1-\rho)L_q}$
متغیرهای وابسته برای مقایسه ی W_k	$B_k = 1- \sum_{c=1}^{k} \dfrac{\lambda_c}{M\mu}$
	$B_0 = 1$
متوسط زمان انتظار در صف برای مشتریان گروه K	$W_k = \dfrac{1}{A \times B_{k-1} \text{ ، } B_k}$
متوسط زمان انتظار در سیستم برای مشتریان گروه **K**	$W = W_k + \dfrac{1}{\mu}$
متوسط تعداد مشتری در صف در گروه **K**	$L_k = \lambda_k \times W_k$

مثال۴) در واحد ارزیابی یک سازمان بزرگ، ۶ نفر برای انجام امور ارزیابی مشغول به کار می باشند. نامه های وارده در یکی از سه پرونده خیلی فوری ۱ و فوری ۲ و فوری ۳ وارد می شود. نظام حاکم بر این واحد، این است که ابتدا به نامه ای که فوریت آن بیشتر است رسیدگی شود. ورود نامه ها براساس تابع توزیع پواسن بوده و با میانگین $\lambda_1 = 4$ ، $\lambda_2 = 4$ ، $\lambda_3 = 2$ در ساعت است. مدت زمان ارزیابی هر نامه به طور متوسط ۳۰ دقیقه است. مطلوب است:

a) بهره وری سیستم.

b) متوسط زمان انتظار هر نامه در هر پرونده در صف ارزیابی.

c) متوسط مدت زمانی که هر نامه در هر پرونده در سیستم منتظر می ماند.

d) متوسط تعداد نامه هایی که در هر پرونده منتظر ارزیابی هستند.

$4+4+2=10$ $\lambda = \sum_K^{\lambda} =$

M=6

μ=2نامه در ساعت

a) بهره وری سیستم

$$\rho = \frac{\lambda}{M\mu} = \frac{10}{6\times 2} = 0/833$$

b) متوسط انتظار هر نامه در هر پرونده در صف ارزیابی

$$= \frac{10}{82} = 5 \qquad M=6\frac{\lambda}{\mu}$$

- با استفاده از جدول فوق:

$$L_q = 2/938$$

$$A= \frac{10}{(1-0/833)2/938} = 20/38$$

$$B_0 = 1$$

$$B_1 = 1- \frac{\lambda_1}{M\mu} = 1- \frac{4}{6\times 2} = 0/66$$

$$B_2 = 1- \frac{\lambda_1+\lambda_2}{M\mu} = 1- \frac{4+4}{6\times 2} = 0/33$$

$$B_3 = 1- \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{M\mu} = 1- \frac{4+4+4}{6\times 2} = 0/16$$

- متوسط زمان انتظار در صف:

پرونده اول $W_1 = \frac{1}{A\times B_0\ ,\ B_1} = \frac{1}{20/38\times 1\times 0/66} = 0/074$

پرونده دوم $W_1 = \frac{1}{A\times B_1\ ,\ B_2} = \frac{1}{20/38\times 0/66\times 0/33} = 0/225$

پرونده سوم $W_3 = \frac{1}{A\times B_2\ ,\ B_3} = \frac{1}{20/38\times 0/33\times 0/16} = 0/93$

C) متوسط زمانی که هر نامه در هر پرونده در سیستم منتظر می ماند:

$$W = W_k + \frac{1}{\mu}$$

پرونده	W_k	$\frac{1}{\mu}$	$W = W_k$ $\frac{1}{\mu}$
1	0/074	0/5	0/574
2	0/225	0/5	0/725
3	0/93	0/5	1/42

d) متوسط زمان انتظار هر نامه در هر پرونده

$L_k = \lambda_k \times W_k$

پرونده	λ_k	W_k	$W = W_k$ $\frac{1}{\mu}$
1	4	0/074	0/296
2	4	0/225	0/9
3	2	0/93	1/86

منابع:

۱- آذر، عادل، **تحقیق در عملیات ۱**، تهران، انتشارات دانشگاه پیام نور.

۲- آذر، ع. فرجی،ح. ۱۳۸۹. **علم مدیریت فازی**. چاپ چهارم. تهران: انتشارات مهربان نشر، ۳۰۸صفحه.

۳- آریانژاد، میربهادر قلی. سجادی، جعفر. **تحقیق در عملیات**.

۴- بیدآبادی، هجرتی، جلالی. **برنامه ریزی عدد صحیح**.

۵- پایدار، محمد مهدی. مهدوی، ایرج. بوتکی، بهرنگ. **روشهای بهینه سازی چند هدفه**، انتشارات دانشگاه صنعتی نوشیروانی .۱۳۹۵.

*۶- جعفرنژاد، احمد: **"تئوری صف"**، فصلنامه مطالعات مدیریت.*

*۷- حمدی، طاها. **تحقیق در عملیات**.*

۸- حبیبی، آرش. ایزدیار، صدیقه. سرافرازی، اعظم. (۱۳۹۳)، **تصمیم‌گیری چندمعیاره فازی**، انتشارات کتیبه گیل.

*۹- دیدبان، عباس. کیانی، محسن: **" بهبود زمان انتظار با استفاده از الگوریتم اولویت دهی بر اساس بالاترین امتیاز درصفوف انسانی"**، دانشکده برق وکامپیوتر، دانشگاه سمنان.*

*۱۰- صالحی صدیقیان، جمشید **:" بهینه سازی در سیستم های صف"**،فصلنامه مطالعات مدیریت.*

*۱۱- عابدی، صادق. رادفر، رضا. حمیدی، ناصر: **" بهینه سازی طرح استقرار جایگاه سوخت رسانی با کاربرد ابزار شبیه سازی در تئوری صف"**، دانشکده مدیریت وحسابداری، دانشگاه آزاداسلامی واحد قزوین.*

۱۲- غفارزاده دیزجی، هما.(۱۳۸۸). **دسته بندی زیر دریایی ها با استفاده از سیستمهای فازی**، پایان نامه کارشناسی، دانشگاه اراک، دانشکده فنی و مهندسی.

۱۳- متقی، هایده. **مدیریت تولید و عملیات**، تهران: آوای پاتریس، ۱۳۸۴.

۱۴- مهرگان، محمدرضا. **پژوهش عملیاتی**، ویراست چهارم، تهران، انتشارات دانشگاه تهران.

۱۵- مومنی، منصور.**مباحث نوین** در **تحقیق در عملیات**، تهران، ۱۳۹۰ .

۱۶- س. هیلبر، فردریک. ج.لیبرمن، جرالد.**تحقیق در عملیات**.

*17-A. Batabyal ,Amitrajeet. (1994) "**The queuing theoretic approach to groundwatermanagement**." Department of Economics, College of William and Mary, Williamsburg, VA 23187, USA.*

18-Aghaei, Jamshid, NimaAmjady, and Heidar Ali Shayanfar. 2011. "**Multi-objective Electricity Market Clearing Considering Dynamic Security by Lexicographic Optimization and Augmented Epsilon Constraint Method**." Applied Soft Computing 11 (4): 3846–3858.

19-Berube, J. F., Gendreau, M. and Potvin, J.Y. (2009) "**An exact ε-constraint method for bi-objective combinatorial optimization problems: Application to the traveling salesman problem with profits**", European Journal of Operational Research, Vol. 194, pp. 39-50.

20-Boothroyd, G. Dewhurst, P. (1983) "**Design for assembly: A designer's Handbook" Amgerst, MA: University of Massachusetts**

21-Chang D. 1996.**Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP**. European Journal of Operational Research 95 : 649-655.

22-Ehrgott, M. and Gandibleux, X. (2002) "**Multiobjective combinatorial optimization theory, methodology and applications" in: M. Ehrgott, X. Gandibleux (Eds.), Multiple criteria optimization: State of the art annotated bibliographic surveys, Kluwer Academic Publishers,** pp. 369–444.

23-FoongKwongch, ChuahT&LeeW. 2010. "**Adaptive Network Fuzzy Inference System(ANFIS) HandoffAlgorithm**". International Journal of Network and Mobile Technologies, 1(2), 54-59.

24-Hwang, C.L., Yoon, K., (1981). **Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications**. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

25-Hwang, C.L., Yoon, K., (1981). **Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications**. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

26-Hong-Xing Li (1995) "**Fuzzy Sets and Fuzzy Decision-making**" Publisher: CRC- Press; 1st edition

27-Lee A. H. I, Chen, W. C. , Chang C. J. 2008**. A fuzzy AHP and BSC approach for evaluating performance of IT department in the manufacturing industry in Taiwan, Expert Systems with Applications**, 34: 96–107.

28-Mamdani, E.H. and Assilian, S. (1975). "**Anexperimental in linguistic synthesis with afuzzy logic control**", Int. J. Man-Mach.Stud. 7: 1–13.

29-Roychowdhury, K and Pedrycz.W.(2007). "**Asurvey of defuzzificationstrategies**",International Journal of Intelligent Systems.16, 679-695, 2001.

30- Saaty, T. L. (1980). "***The Analytic Hierarchy Process*"**, McGraw-Hill, New York.

31-Saaty, T. L. and L. G. Vargas (2006).**Decision Making with the Analytic Network Process: Economic, Political, Social and Technological Applications with Benefits, Opportunities, Costs and Risks, Springer.**

32-Saaty, R. W. (1987). "**The analytic hierarchy process—what it is and how it is used." Mathematical Modelling9**(3–5): 161-176.

*33-Tabari,M.Gholipour-Kanani,Y. Seifi-Divkolaii,M and Tavakkoli-Moghaddam,Reza.(2012) "**Application of the Queuing Theory to Human Resource Management",** World Applied Sciences Journal 17 (9): 1211-1218*

34-V,Pedrycz W,Laarhoven. 1983**. Some Applicational Aspects Of Fuzzy Relations Equatins In Systems Analysis, Fuzzy Set and System**

.

35-Wang, Y.J., (2008**). Applying FMCDM to evaluate financial performance of domestic airlines in Taiwan.ExpertSystems with Applications**, 34, 1837 – 1845.

36-Wang, Y.J., (2008). Applying FMCDM to evaluate financial performance of domestic airlines in Taiwan.ExpertSystems with Applications, 34, 1837 – 1845

37-Zadeh, L.A. (1965). **"Fuzzy sets."** ***Information and Control***, Vol. 8, No. 3, PP. 338–353.